

مدل‌سازی اجزاء مجزا برای ذرات با شکل نامنظم در محیط دو بعدی

صبا عابدی انارکی^۱ و علی اصغر میرقاسمی^{۲*}

^۱ دانش آموخته کارشناسی ارشد مکانیک خاک و پی، دانشگاه تهران

^۲ استاد دانشکده مهندسی عمران، پردیس دانشکده‌های فنی

(تاریخ دریافت: ۱۳۸۷/۱۰/۱۰، تاریخ دریافت روایت اصلاح شده: ۱۳۹۰/۰۷/۲۷، تاریخ تصویب: ۱۳۹۰/۱۰/۲۴)

چکیده

برای به دست آوردن مدل‌سازی دقیقی که قابل مقایسه با نتایج آزمایشگاهی باشد، ویژگی‌های ذرات نظیر شکل، اندازه، الاستیسیته و پلاستیسیته، قابلیت خردشیدگی و موارد مشابه باید با دقت زیادی مدل شوند. از آن جایی که شکل ذره بر رفتار مکانیکی گروه ذرات نظیر مقاومت برشی تأثیر بسیار زیادی دارد، بنابراین مدل‌سازی مناسب شکل ذره از اهمیت بالایی برخوردار است. در اکثر مدل‌سازی‌هایی که تا کنون انجام شده‌اند و به برسی رفتار خاک پرداخته‌اند، شکل ذرات به صورت دایره، بیضی و چند ضلعی مدل شده‌است که هیچ کدام مدل‌سازی مستقیمی از شکل ذره نامنظم محسوب نمی‌شوند و بنابراین رفتار مکانیکی را به خوبی نمایان نمی‌سازند. روشی که در این مقاله به کار برده شده‌است، در واقع مدل‌سازی مستقیم شکل ذره می‌باشد. در این روش شکل نامنظم ذرات واقعی، با ترکیب کردن تعداد دلخواهی المان دایره‌ای شکل که می‌توانند با یکدیگر هم پوشانی داشته باشند و به صورت صلب به هم متصل شده‌اند مدل‌سازی شده‌است. برای بررسی تأثیر شکل ذرات بر ویژگی‌های مکانیکی خاک‌های دانه‌ای سه گروه ذرات یعنی ذرات تیز گوش، ذرات با زاویه‌داری متوسط و ذرات گرد گوش در نظر گرفته شده‌اند. سپس با استفاده از روش اجزاء مجزا یک سری آزمایش دو محوری شبیه‌سازی شده در فشارهای همه جانبه مختلف، ضرائب اصطکاک مختلف و نسبت تخلخل‌های مختلف بر روی مجموعه‌های ایجاد شده از هر دسته ذرات انجام شده‌اند. نتایج نشان می‌دهند که میزان زاویه‌داری ذرات بر رفتار خاک تأثیرات قابل ملاحظه‌ای دارد. هم چنین نتایج به دست آمده به طور کافی با نتایج آزمایشگاهی مقایسه شده‌اند که تطابق خوبی بین نتایج دیده شده‌است.

واژه‌های کلیدی: شکل نامنظم ذره، روش اجزاء مجزا، مدل‌سازی عددی

مقدمه

قانون دوم نیوتون موقعیت‌ها و سرعت‌های جدید را در پایان هر گام زمانی، Δt می‌دهد و قانون نیرو- جابه‌جا‌یی نیروهای جدید تماسی بین دو ذره را محاسبه می‌کند. این سیکل محاسباتی تا تعیین مجموعه‌ای از جابه‌جا‌یی‌ها که در آن تمامی ذرات به تعادل برسند ادامه خواهد یافت. بنابراین سه مرحله کلی را در این روش می‌توان در نظر گرفت: ۱- اعمال نیرو یا تغییر مکان‌های خارجی ۲- انتشار بی نظمی^۳- بر قراری تعادل

أنواع روش‌های مدل‌سازی شکل ذرات

در طرح اولیه روش اجزاء مجزا ذرات دانه‌ای به صورت دیسک‌هایی در محیط دو بعدی و کره‌هایی در محیط سه بعدی مدل‌سازی شده‌اند [۱-۳]. ذرات دایره‌ای (یا کروی) از لحاظ سادگی محاسبات دارای مزیت‌های زیادی هستند. نمایش تماس بین ذرات دایره‌ای شکل نیاز به الگوریتم پیچیده‌ای ندارد. هم چنین در آزمایش‌ها به دلیل سهولت در چرخش به آسانی در کنار یکدیگر حرکت

روش اجزاء مجزا (DEM) یک تکنیک عددی است که اولین بار توسط Cundall برای مسائل مکانیک سنج که در آن پیوستگی بین المان‌های مجزا موجود نمی‌باشد به کار رفت [۱]. روش اجزاء مجزا برای مدل‌سازی خاک‌های دانه‌ای اولین بار توسط Strack و Cundall توسعه یافت [۲]. این روش یک روش مناسب برای شبیه‌سازی رفتار مصالح دانه‌ای است، چرا که با مجزا فرض کردن ذرات و انتقال نیروها از طریق تماس بین ذرات، رفتار مجازی مصالح دانه‌ای به درستی شبیه‌سازی می‌شود. در روش المان‌های مجزا تعییر مکان‌ها و نیروهای تماسی متعادل در مجموعه‌ای از ذرات که از طریق شرایط مرزی اعمال شده تحت تنش قرار گرفته‌اند، از طریق یک سری از محاسبات که حرکات هر ذره را دنبال می‌کند، تعیین می‌شوند. این جابه‌جا‌یی‌ها نتیجه انتشار آشفتگی مرتبط با اعمال نیروها یا تغییر مکان‌های خارجی می‌باشند. به دلیل نیروهای نامتعادل، ذرات سعی در باز آرایش خودشان دارند به گونه‌ای که تعادل حاصل شود.

مشابه ذرات بیضی شکل، شکل واقعی ذرات را مشخص نمی‌سازد.

Ng و **Lin** یک برنامه جدید بر اساس روش اجزا مجرا توسعه دادند که شکل ذرات بیضوی در نظر گرفته شده بود [۱۱]. سپس یک مطالعه عددی روی رفتار مکانیکی مجموعه‌ای متشکل از ذرات هم اندازه با استفاده از این برنامه انجام گردید. مقاومت برشی بیشتر، مدول اولیه بزرگتر، انبساط بیشتر و دوران کمتر ذرات با مجموعه بیضوی هنگام آزمایش سه محوری مشاهده گردید. نتایج نشان داد که استفاده از ذرات غیر کروی در مدل‌سازی اجزا مجرا برای اصلاح شبیه‌سازی‌های مصالح دانه‌ای ضروری است.

Favier و همکاران یک روش برای مدل‌سازی ذرات به صورت المان‌های مجزای متقاضان متشکل از چند کره ارائه دادند که تطابق خوبی بین رفتار مجموعه شبیه‌سازی شده و مجموعه مشابه واقعی مشاهده گردید [۱۲]. این متده به طور تئوریک هر شکلی را می‌تواند مدل‌سازی کند اما به هر حال ذرات با شکستگی زیاد نمی‌توانند به درستی مدل‌سازی شوند.

Jensen و همکاران روش خوش‌های را معرفی کردند که شکل ذره با اتصال تعدادی المان دایره‌ای در یک پیکر بندي نیمه صلب نشان داده می‌شود و بنابراین شکل ذرات خاک بهتر معرفی می‌شود [۱۳]. تماس‌های بین المان‌های دایره‌ای در داخل خوش به صورت الاستیک خطی با سختی بالا می‌باشند که منجر به حرکت و دوران ذره به صورت یک جسم صلب می‌شوند. با وجودی که این روش نسبت به متدهای اولیه پیشرفته‌تر است ولی دارای مشکلاتی نیز می‌باشد. از جمله این که خطوط پیرامونی ذره شبیه‌سازی شده به خطوط پیرامونی ذرات واقعی شباهت زیادی ندارند و هم چنین در زمان محاسبات یک افزایش عمدی دیده می‌شود.

مدل‌سازی مستقیم شکل ذره

در تمامی روش‌های مدل‌سازی که در بخش قبلی شرح داده شد، شکل‌هایی فرضی به جای شکل ذره در نظر گرفته می‌شوند و هیچ کدام با مدل‌سازی مستقیم از شکل ذرات سروکار ندارند. روشنی که در این قسمت شرح داده می‌شود، در واقع مدل‌سازی مستقیم شکل ذره می‌باشد. در این روش شکل

می‌کنند، اما در تطابق با واقعیت این مدل‌سازی دارای مشکلاتی می‌باشد. مقاومت در برابر دوران برای ذرات دایره‌ای در مقایسه با ذرات واقعی به طور قابل ملاحظه‌ای کمتر می‌باشد. ذرات دایره‌ای تمایل ذاتی به غلتش دارند. هم چنین زاویه اصطکاک داخلی مجموعه ذرات دایره‌ای مدل شده با استفاده از **DEM** به طور قابل ملاحظه‌ای کوچکتر از مجموعه ذرات واقعی با شکل نامنظم می‌باشد. به دلیل این مشکلات، شکل‌های مختلفی برای ذرات به جای دیسکها (یا کره‌ها) در مطالعات تحقیقاتی زیادی پیشنهاد شده‌اند تا در شبیه‌سازی به روش **DEM** استفاده شوند و شبیه‌سازی را اصلاح سازند.

تاکنون مطالعات تحقیقاتی زیادی بر روی رفتار خاک‌های دانه‌ای با استفاده از ذرات بیضی شکل انجام شده‌اند [۶ - ۴]. ذرات بیضی شکل دارای این مزیتها هستند، ذرات بیضی نسبت به ذرات دایره‌ای تمایل کمتری به دوران دارند و رفتار مکانیکی مجموعه‌های شبیه‌سازی شده با این ذرات مشابه با رفتار خاک‌های واقعی می‌باشد، به علاوه در هر نقطه دارای تنها یک بردار عمود بر سطح می‌باشند و تعمیم دادن به حالت سه بعدی این ذرات نیز ساده می‌باشد. اما به هر حال به طور دقیق شکل ذره را نشان نمی‌دهند.

محققان زیادی به مطالعه رفتار خاک با استفاده از ذرات چند ضلعی پرداخته‌اند [۷ - ۹]. نتایج به دست آمده نشان می‌دهند یک معرفی واقعی‌تر از رفتار خاک با استفاده از این ذرات می‌تواند حاصل شود. اما به هر حال این روش از لحاظ محاسباتی سنگین می‌باشد و زمان اجرای برنامه به طور قابل ملاحظه‌ای افزایش می‌باشد.

Campbell و **Potapov** یک مدل کارآمد محاسباتی برای شبیه‌سازی به روش المان مجزای ذرات غیر دایره‌ای را ارائه دادند [۱۰]. ایده آن‌ها تقریب‌زدن بیضی با یک شکل تخم مرغی است که مرز آن توسط چهار کمان دایره‌ای با دو شعاع متفاوت که به طور پیوسته به یکدیگر متصل شده‌اند تعیین می‌شود. این ایده از لحاظ محاسباتی کارآمد است به دلیل آنکه تعیین تماس و هم‌پوشانی بین دو بخش کمان دایره‌ای خیلی مشابه با هم پوشانی دواخیر در ذرات دایره‌ای شکل می‌باشد. یک آزمایش مستقیم از عملکرد این روش نشان داد که این روش بسیار مؤثر می‌باشد و اجرای برنامه کمی کندر از اجرای برنامه با ذرات دایره‌ای شکل است. اما به هر حال این نیز

محاسبات مجموعه‌های با ذرات دایره‌ای شکل است و نیاز به الگوریتم پیچیده محاسباتی نیست. همچنین تعمیم دادن این روش به حالت سه بعدی آسان می‌باشد.

برای شبیه‌سازی مجموعه‌های متشكل از ذراتی که با روش شرح داده شده مدل‌سازی شده‌اند، برنامه **BALL DISC** که در واقع اصلاح شده برنامه **BALL** می‌باشد، اتخاذ شد و تغییرات لازم بر روی آن انجام گردید. در این برنامه تغییر یافته، محاسبه نیروهای تماسی برای هر المان دایره‌ای از هر ذره انجام می‌شود و معادله حرکت برای هر ذره حل می‌شود. با این رویکرد، اتصال صلب المان‌های دایره‌ای فراهم می‌گردد.

انتخاب شکل ذرات

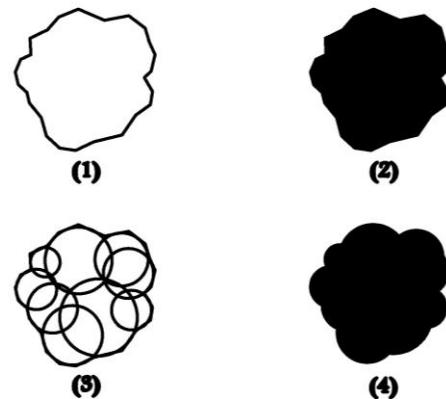
با توجه به روش مدل‌سازی شرح داده شده، ابزار مناسبی برای بررسی تأثیر شکل‌های مختلف ذرات بر ویژگی‌های مکانیکی خاک در دست داریم. بدین منظور سه دسته از ذرات یعنی ذرات تیز گوشه، ذرات با زاویه‌داری متوسط و ذرات گرد گوشه در نظر گرفته شده‌اند. ابتدا ۱۶ تیپ از ذرات تیز گوشه با شاعع معادل ۵ تا ۲۰ میلی متر ایجاد شدند. سپس با گرد کردن گوشه‌های تیز در این ذرات، ذرات گرد گوشه‌ای با شکل مشابه ذرات تیز گوشه ایجاد شدند، یعنی برای هر تیپ از ذرات گرد گوشه، شکل و شاعع معادل مشابه تیپ نظری آن در ذرات تیز گوشه می‌باشد. برای ذرات با گوشه‌داری متوسط نیز سعی شد که با کم کردن میزان تیز گوشگی شکل‌های نظری ایجاد شوند. نمونه‌ای از اشکال ایجاد شده برای سه دسته ذرات در شکل ۲ نشان داده شده‌است. هم چنین برای اینکه تنها تأثیر میزان گوشه‌داری ذرات بر رفتار مکانیکی لحاظ شود، انتخاب شکل ذرات به گونه‌ای انجام شد که تأثیر خروج از مرکزیت ذرات به حداقل برسد، به عبارت دیگر سعی شد که ذراتی انتخاب شوند که در داخل مربع محاط شوند نه مستطیل، زیرا با توجه به نتایج تحقیقاتی که انجام شده‌است میزان خروج از مرکزیت ذرات نیز بر رفتار مکانیکی آن‌ها تأثیرگذار می‌باشد [۱۵].

نامنظم ذرات واقعی، با ترکیب کردن تعداد دلخواهی المان دایره‌ای شکل که می‌توانند با یکدیگر هم‌پوشانی داشته باشند و به صورت صلب به هم متصل شده‌اند مدل‌سازی می‌شود [۱۴]. نمونه‌ای از این مدل‌سازی در شکل ۱ نمایش داده شده‌است. عموماً با ترکیب کردن حداقل ۱۰ تا ۱۵ المان دایره‌ای، شکل ذره مورد نظر عیناً مدل‌سازی می‌شود. تعداد المان‌های دایره‌ای شکل برای مدل‌سازی شکل ذره با توجه به موارد زیر تعیین می‌شود:

- درجه غیر یکنواختی و شکستگی شکل ذره اصلی

- سطح دقیق هندسی مدنظر

- محدودیت در نظر گرفته شده برای زمان محاسبات



شکل ۱:

(۱) خطوط پیرامونی ذره مورد نظر

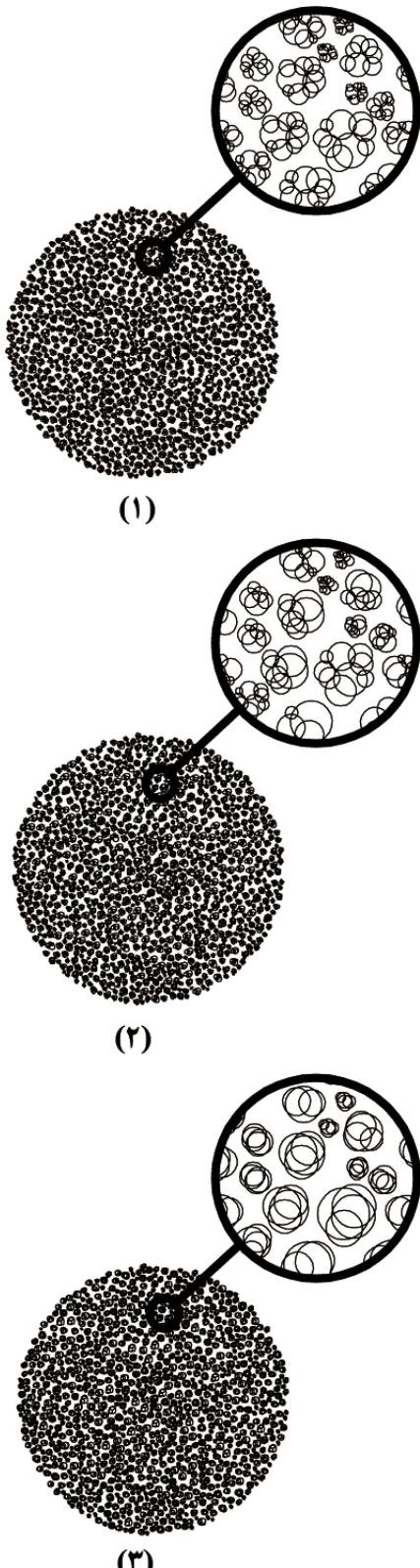
(۲) ذره مورد نظر

(۳) مدل‌سازی ذره با ترکیب المان‌های دایره‌ای شکل

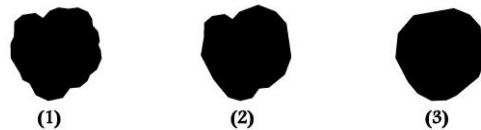
(۴) ذره مدل‌سازی شده

با این روش مدل‌سازی مستقیم، ابزاری داریم که می‌توان برای به دست آوردن نتایج واقع بینانه‌تر از رفتار مکانیکی مجموعه ذرات از آن استفاده کرد. هم چنین نتایج مجموعه‌های شبیه‌سازی شده را از لحاظ کیفی می‌توان با نتایج آزمایشگاهی مجموعه‌های ذرات واقعی مقایسه نمود. از طرفی روند کلی محاسبات مجموعه‌های شبیه‌سازی شده مشابه با

در مرحله بعد با به کار بردن روش مدل سازی شرح داده شده شکل ذرات با ترکیب کردن المان های دایره ای شکل مدل سازی شده است.



شکل ۴: مجموعه های ایجاد شده
 (۱) با ذرات تیز گوشه
 (۲) با ذرات با گوشهداری متوسط
 (۳) با ذرات گرد گوشه



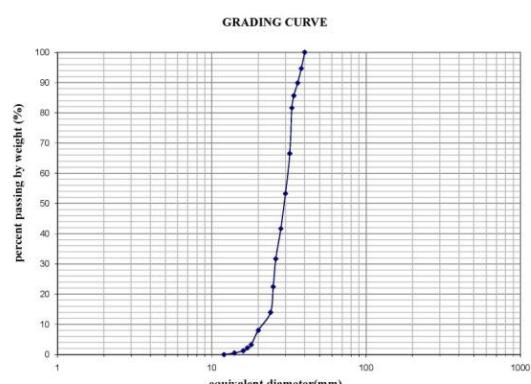
شکل ۲:

- (۱) ذره تیز گوشه
- (۲) ذره با گوشهداری متوسط
- (۳) ذره گرد گوشه

ایجاد نمونه ها

در این مطالعه، آزمایش ها بر روی مجموعه های دایره ای شکل مت Shankl از ۱۰۰۰ ذره و با دانه بندی مشابه شکل ۳ برای هر دسته از ذرات انجام شده اند.

در ابتدا مجموعه دایره ای شکل با ذرات تیز گوشه ایجاد گردید و مختصات مرکز ثقل ذرات در یک فایل خروجی ثبت گردید. برای ایجاد مجموعه های با ذرات گرد گوشه و ذرات با گوشهداری متوسط، این فایل خروجی برای تعیین محل ذرات به کار رفت و محل مرکز ثقل هر یک از ذرات منطبق با محل مرکز ثقل ذره تیز گوشه نظیر آن انتخاب گردید. در واقع با اتخاذ این روش امکان مقایسه بهتر رفتار مجموعه های ایجاد شده با هر دسته از ذرات فراهم می شود. مجموعه های ایجاد شده با هر دسته از ذرات در شکل ۴ نشان داده شده اند.



شکل ۳: منحنی دانه بندی برای ایجاد نمونه ها

نسبت مساحت اشغال شده توسط ذرات به مساحت کل مجموعه که نسبت تراکم مجموعه نامیده می‌شود، برای هر سه نمونه هنگامی که تحت فشارهای همه‌جانبه مختلف به تعادل رسیده‌اند در جدول ۲ نشان داده شده است. همان‌طور که دیده می‌شود مقادیر نسبت تراکم با افزایش فشار همه‌جانبه و کاهش تیز گوشگی ذرات، اندکی افزایش می‌یابد.

جدول ۲: نسبت تراکم نمونه‌ها پس از اعمال فشارهای همه‌جانبه مختلف

Confining pressure (MPa)	Density		
	High Angular grains	Medium angular grains	Round grains
0.1	0.858	0.876	0.880
0.5	0.867	0.878	0.884
1	0.867	0.880	0.884
2	0.869	0.882	0.880
4	0.870	0.885	0.886

در مرحله چهارم آزمایش که به شبیه‌سازی آزمایش دو محوری اختصاص دارد، نرخ کرنش اعمالی در راستای قائم که منجر به افزایش کرنش محوری می‌گردد ۰/۰۰۰۵ انتخاب شده است، در این مرحله نیز برای اینکه نتایج تحت تأثیر نرخ کرنش‌های متفاوت قرار نگیرند، سعی شد که نرخ کرنش ثابتی برای حالت‌های مختلف منظور گردد.

آزمایش‌های با ضرائب اصطکاک مختلف

به منظور بررسی تأثیر میزان اصطکاک بین ذرات بر رفتار مکانیکی مجموعه‌های ایجاد شده، آزمایش‌های با ضرائب اصطکاک متفاوت به روی مجموعه‌های ایجاد شده از سه دسته ذرات انجام شده‌اند. مقادیر پارامترهای ورودی برنامه (به غیر از ضریب اصطکاک که متغیر می‌باشد)، مشابه بخش قبلی (جدول ۱) می‌باشند.

مراحل اول و دوم آزمایش مشابه مطالب ذکر شده در بخش قبل می‌باشند. در مرحله سوم آزمایش، نمونه‌ها تحت فشار همه‌جانبه ثابت یک مگاپاسکال و ضرائب اصطکاک متغیر صفر، ۰/۲۵، ۰/۵ و ۰/۷۵ قرار گرفتند. نسبت تراکم مجموعه‌ها پس از رسیدن به تعادل در این مرحله در جدول ۳ نشان داده شده‌اند.

آزمایش‌های شبیه‌سازی شده

به منظور بررسی تأثیر عوامل مختلف بر روی رفتار مکانیکی هر دسته از ذرات، سه گروه آزمایش برای هر دسته از ذرات شبیه‌سازی شده‌اند:

- آزمایش‌های با فشارهای همه‌جانبه مختلف
- آزمایش‌های با ضریب اصطکاک‌های مختلف
- آزمایش‌های با نسبت تخلخل‌های مختلف

در این بخش به شرح جزئیات هر دسته از آزمایش‌ها پرداخته می‌شود.

آزمایش‌های با فشارهای همه‌جانبه مختلف

به منظور بررسی تأثیر میزان زاویه‌داری ذرات در فشارهای همه‌جانبه متفاوت بر ویژگی‌های مکانیکی مجموعه‌های ایجاد شده، آزمایش‌های دو محوری بر روی نمونه‌های ایجاد شده از سه دسته ذرات انجام شده‌است. برای اینکه امکان مقایسه بهتر نتایج آزمایش‌ها فراهم شود پارامترهای ورودی برنامه برای انجام آزمایش‌ها روی سه نمونه یکسان در نظر گرفته شده‌اند. جدول ۱ پارامترهای انتخاب شده را نشان می‌دهد. لازم به ذکر است که از اثر شتاب جاذبه زمین صرف نظر شده است و چسبندگی سطح دانه‌ها نیز صفر منظور شده است.

آزمایش‌های دو محوری در چهار مرحله انجام می‌شوند. در مرحله اول مجموعه‌های ایجاد شده در معرض نرخ کرنش ۰/۰۰۵ در ۵۰۰۰۰ سیکل قرار گرفتند تا مجموعه‌های شل اولیه متراکم شوند. در مرحله دوم نرخ کرنش صفر انتخاب گردید تا مجموعه‌ها به تعادل برسند. در مرحله سوم آزمایش، فشارهای همه‌جانبه ۰/۱، ۰/۵، یک، دو و چهار مگاپاسکال انتخاب شدند و بر نمونه‌های به تعادل رسیده از مرحله قبل اعمال شدند.

جدول ۱: پارامترهای ورودی برای شبیه‌سازی عددی

Parameters	Values
Normal contact stiffness(N/m)	245×10^7
Tangential contact stiffness(N/m)	245×10^7
Density of particles(kg/m^3)	2000
Damping coefficients (α, β)	5&0.01
Critical time step factor (FRAC)	0.01
Inter-particle friction coefficients	0.5

کردن ضریب اصطکاک و انتخاب نرخ کرنش ثابت ۵/۰۰۰۵، تأثیر نسبت تخلخل های متفاوت (یا به عبارت دیگر تأثیر میزان تراکم های متفاوت) بر رفتار مکانیکی هر دسته بررسی گردید.

جدول ۴: نسبت تخلخل های مختلف برای نمونه ها

Friction coefficient (μ)	Void ratio		
	High angular grains	Medium angular grains	Round grains
0	0.125	0.107	0.089
0.25	0.147	0.126	0.123
0.5	0.153	0.137	0.131
0.75	0.151	0.136	0.133

نتایج آزمایش ها

برای ارائه نتایج آزمایش های شبیه سازی شده در این مقاله از دو نمودار زیر استفاده شده است:

- تغییرات زاویه اصطکاک داخلی بسیج شده مصالح که با $\sin\phi_{mobilized}$ تعیین می گردد در برابر کرنش محوری e_a

- تغییرات کرنش حجمی ϵ_v بر حسب کرنش محوری e_a

نتایج آزمایش های با فشارهای همه جانبه مختلف

نتایج آزمایش های دو محوری بر روی مجموعه های با ذرات تیز گوشه در فشارهای همه جانبه مختلف در شکل ۵ و نتایج به دست آمده برای سه دسته ذرات در فشار همه جانبه ۱ مگا پاسکال در شکل ۶ نشان داده شده است. خلاصه بقیه نتایج به دست آمده در جداول ۵ و ۶ آورده شده است. با توجه به نمودارها و جداول ارائه شده نتایج زیر استخراج می شود:

- زاویه اصطکاک داخلی بسیج شده و انبساط با افزایش فشار همه جانبه برای هر سه دسته ذرات کاهش می یابد. در واقعیت کاهش این زاویه و انبساط در فشارهای همه جانبه بالاتر به شکست و سائیده شدن گوشته های تیز ذرات نسبت داده می شود [۱۶]، اما در این مطالعه این پدیده مدل سازی نشده است. اعمال فشارهای همه جانبه بالاتر منجر به انقباض و کاهش حجم بیشتر در نمونه ها می گردد و نمونه ها به آسانی نمی توانند منبسط گردند. همان طور که در شکل ۵ نیز دیده می شود، میزان کاهش حجم در

جدول ۳: نسبت تراکم نمونه ها پس از اعمال ضرائب اصطکاک مختلف

Friction coefficient (μ)	Density		
	High angular grains	Medium angular grains	Round grains
0	0.889	0.903	0.918
0.25	0.872	0.888	0.890
0.5	0.867	0.880	0.884
0.75	0.869	0.880	0.883

همان طور که دیده می شود تراکم مجموعه ها با کاهش ضریب اصطکاک و کاهش تیز گوشگی ذرات افزایش می یابد. جهت بررسی میزان تأثیر تراکم اولیه مجموعه ها، آزمایش های شبیه سازی شده اند که در بخش بعد توضیح داده شده است.

در مرحله چهارم آزمایش نیز با ضرائب اصطکاک مختلف آزمایش دو محوری شبیه سازی شد. مقدار نرخ کرنش اعمالی در این مرحله مانند قبل برابر ۵/۰۰۰۵ برای حالات مختلف انتخاب گردید.

آزمایش های با نسبت تراکم های مختلف

همان طور که در بخش قبل دیده شد، هنگامی که نمونه ها تحت فشار همه جانبه ثابت یک مگا پاسکال در ضرائب اصطکاک مختلف قرار گرفتند میزان تراکم آنها پس از رسیدن به تعادل اندکی با یکدیگر تفاوت داشت. با توجه به تعریف نسبت تراکم مجموعه ها، اگر نسبت تخلخل (ϵ_v) را به صورت نسبت سطح فضاهای خالی بین ذرات به سطح اشغال شده توسط ذرات در نظر بگیریم خواهیم داشت:

$$\epsilon_v = \frac{A_V}{A_S} = \frac{A - A_S}{A_S} = \frac{1}{\text{Density}} - 1 \quad (1)$$

بنابراین با توجه به مقادیر نسبت تراکم ها در جدول ۳، مقادیر نسبت تخلخل مطابق با جدول ۴ به دست می آید. به دلیل اینکه تنها تأثیر این نسبت تخلخل های مختلف در رفتار مکانیکی هر سه مجموعه بررسی شود، آزمایش های دو محوری (مرحله چهارم آزمایش) بر روی این نمونه ها با ضریب اصطکاک ثابت ۵/۰ نیز انجام شد، یعنی تا انتهای مرحله سوم آزمایش ها مشابه بخش قبل می باشد و فقط در مرحله چهارم آزمایش با ثابت فرض

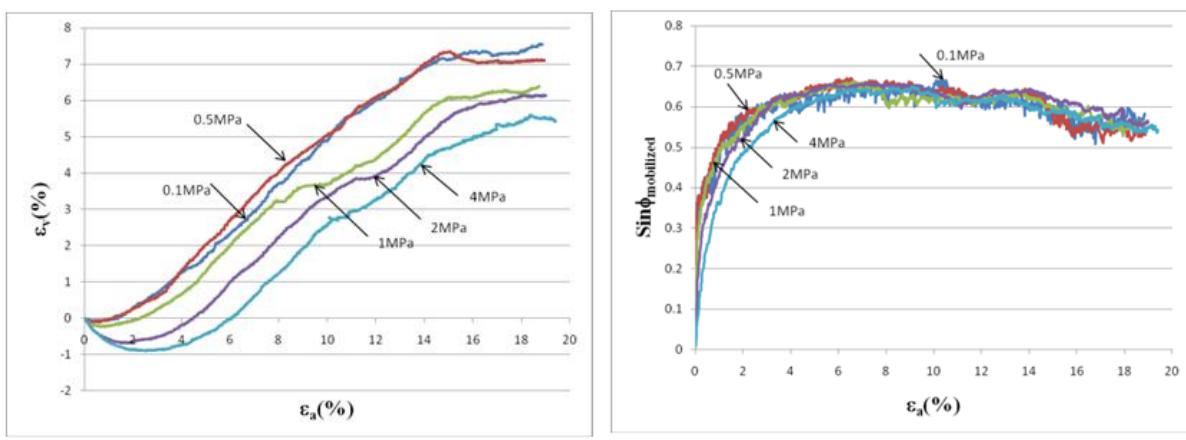
شده‌اند ($\mu=0.5$)، بنابراین مقاومت برشی بالاتر عمدتاً مرتبط با قفل و بسط بیشتر بین دانه‌ها می‌باشد. در ذرات تیز گوش، قفل و بسط قابل ملاحظه‌ای بین ذرات وجود دارد و منجر به مقاومت برشی و انبساط بیشتر مجموعه در هنگام انجام آزمایش دو محوری می‌گردد.

■ خلاصه نتایج عددی به دست آمده، در جداول ۵ و ۶ نشان داده شده‌اند. در جدول ۵ مقادیر ماکریم زاویه اصطکاک داخلی بسیج شده برای سه نمونه در فشارهای همه‌جانبه مختلف آورده شده‌است. همان‌طور که دیده می‌شود، مقدار ماکریم زاویه اصطکاک داخلی بسیج شده برای ذرات تیز گوش در یک فشار همه‌جانبه مشخص، حدود ۳ تا ۵ درجه بزرگتر از ذرات با گوشهداری متوسط معادل آن و حدود ۱۱ تا ۱۴ درجه بزرگتر از ذرات گردگوش معادل آن می‌باشد. جدول ۶ مقادیر انبساط نمونه‌ها را در فشارهای همه‌جانبه مختلف و در کرنش محوری ۱۸٪ نشان می‌دهد. مقادیر انبساط برای ذرات تیز گوش حدود ۰/۵ تا ۰/۲٪ بزرگتر از ذرات با گوشهداری متوسط و ۲ تا ۴٪ بزرگتر از ذرات گردگوش دیده می‌شود.

فشارهای همه‌جانبه بالاتر افزایش یافته‌است. بنابراین، ذرات نمی‌توانند به راحتی روی یکدیگر حرکت کنند و کاهش زاویه اصطکاک داخلی بسیج شده رخ می‌دهد.

■ در یک فشار همه‌جانبه مشخص، مقاومت برشی (یا زاویه اصطکاک بسیج شده) و انبساط با افزایش گوشهداری ذرات به طور قابل ملاحظه‌ای افزایش می‌یابد. هم‌چنین دیده می‌شود که مقاومت برشی ماکریم برای ذرات تیز گوش و ذرات با گوشهداری متوسط نسبت به ذرات گردگوش در کرنش‌های محوری بزرگتری رخ داده است. همان‌طور که دیده می‌شود، مقاومت برشی مانده برای نمونه‌های با ذرات تیز گوش و ذرات با گوشهداری متوسط نسبت به ذرات گردگوش نیز افزایش یافته‌است مقاومت برشی مانده برای ذرات تیز گوش و ذرات با گوشهداری متوسط تقریباً یکسان می‌باشد و بنابراین می‌تواند استنتاج شود که میزان تأثیر گوشهداری ذرات بر مقاومت برشی مانده در ذرات با تیز گوشگی بیشتر کاهش می‌یابد.

مقاومت برشی مجموعه‌های ذرات ناشی از دو عامل است، مقاومت ناشی از اصطکاک بین دانه‌ها و مقاومت ناشی از قفل و بست بین دانه‌ها. همان‌طور که گفته شد ضرائب اصطکاک برای هر سه دسته ذرات یکسان انتخاب



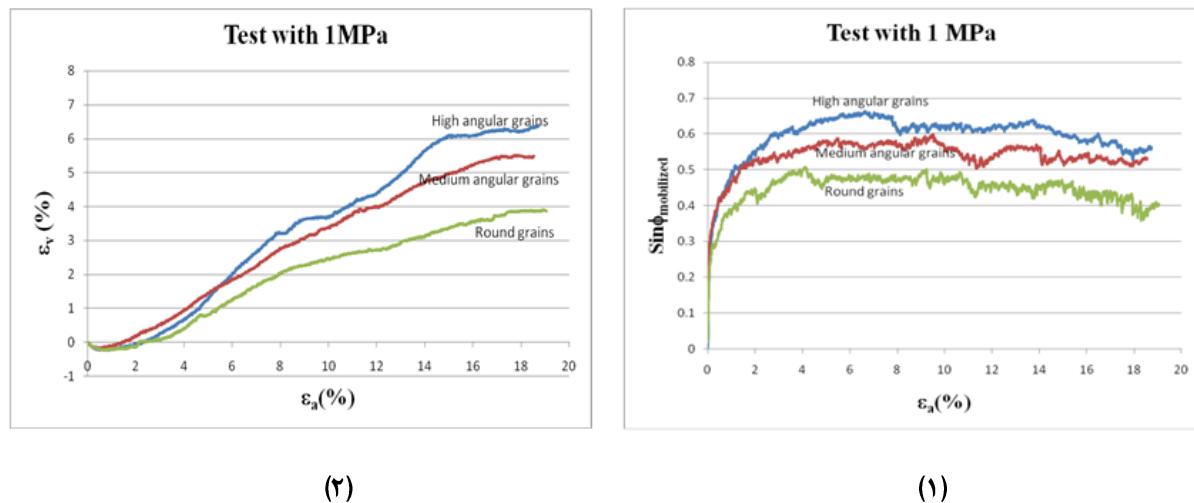
(۲)

(۱)

شکل ۵: نمودارهای

 $\sin\phi_{mobilized}$ (۱)

(۲) کرنش حجمی نسبت به کرنش محوری برای ذرات تیز گوش در فشارهای همه‌جانبه مختلف



شکل ۶: نمودارهای

 $\text{Sin}\phi_{\text{mobilized}}$ (۱)

(۲) کرنش حجمی نسبت به کرنش محوری برای سه دسته ذرات در فشار همه جانبه یک مگاپاسکال

اصطکاک ۷۵/۰ در شکل ۸ نشان داده شده است. خلاصه بقیه نتایج به دست آمده در جداول ۷ و ۸ آورده شده است. با توجه به نمودارها و جداول ارائه شده نتایج زیر به دست می‌آید:

- مقاومت برشی با افزایش ضریب اصطکاک برای هر سه دسته ذرات افزایش می‌یابد. همان‌طور که دیده می‌شود، اختلاف مقاومت برشی حداکثر برای ضرائب اصطکاک ۰/۵ و ۷۵/۰ کم می‌باشد و می‌توان نتیجه گرفت که میزان افزایش مقاومت برشی برای ضریب اصطکاک‌های بالاتر کاهش می‌یابد. با توجه به این نمودارها، با تغییر ضریب اصطکاک از صفر به ۰/۲۵ افزایش قابل توجه مقاومت برشی دیده می‌شود و این مطلب نشان دهنده این است که مقاومت ناشی از اصطکاک سهم قابل توجهی از مقاومت برشی را تشکیل می‌دهد، البته برای ذرات تیز گوشه و ذرات با گوشداری متوسط، افزایش مقاومت بیشتری نسبت به ذرات دایره‌ای با تغییر ضریب اصطکاک از صفر به ۰/۲۵ دیده می‌شود. هم چنان مقاومت برشی مانده نیز با افزایش ضریب اصطکاک افزایش می‌یابد. نمونه‌های با ضرایب اصطکاک بالاتر در هنگام انجام آزمایش دو محوری، کاهش حجم کمتر و انبساط بیشتری را از خود نشان می‌دهند.

- در یک ضریب اصطکاک مشخص، مقاومت برشی و انبساط با افزایش گوشداری ذرات افزایش می‌یابد. مقاومت برشی مانده نیز با افزایش گوشداری ذرات

جدول ۵: مقادیر حداکثر زاویه اصطکاک برای نمونه‌ها در فشارهای همه‌جانبه مختلف

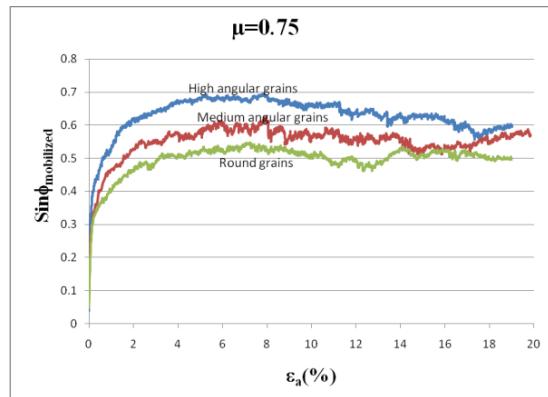
Confining pressure (MPa)	$(\Phi_{\text{mobilized}})_{\text{max}}$		
	High angular grains	Medium angular grains	Round grains
0.1	41.8°	39.7°	30.3°
0.5	42.1°	38°	30.8°
1	41.5°	36.8°	30.4°
2	41°	35.8°	28.4°
4	40.5°	36.4°	27.1°

جدول ۶: مقادیر انبساط برای نمونه‌ها در فشارهای همه‌جانبه مختلف

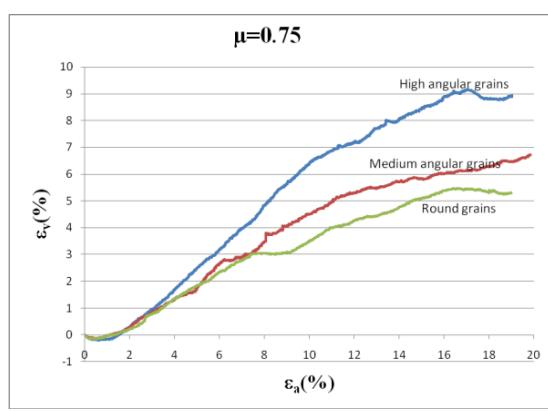
Confining pressure (MPa)	Dilation value in $\epsilon_a = 18\%$		
	High angular grains	Medium angular grains	Round grains
0.1	7.4%	6.6%	3.4%
0.5	7.1%	6.8%	4.1%
1	6.2%	5.5%	3.9%
2	6.1%	5.1%	2.5%
4	5.4%	3.6%	2.4%

نتایج آزمایش‌های با ضرائب اصطکاک مختلف

نتایج آزمایش‌های دو محوری بر روی مجموعه‌های با ذرات تیز گوشه با ضرائب اصطکاک مختلف در شکل ۷ و نتایج به دست آمده برای سه دسته ذرات با ضریب



(1)



(2)

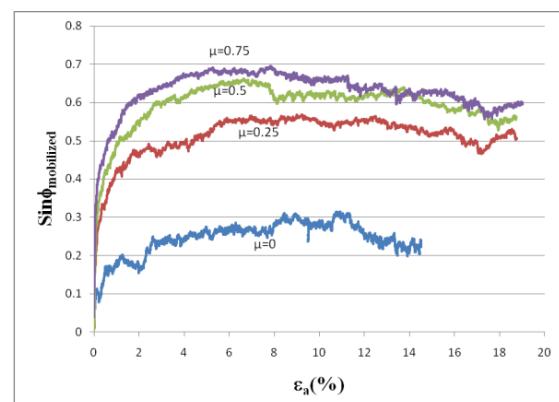
شکل ۸: نمودارهای

 $\text{Sin}\phi_{\text{mobilized}}$ (۱)

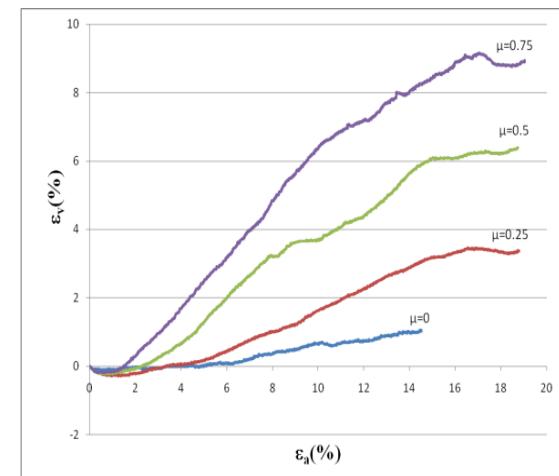
(۲) کرنش حجمی نسبت به کرنش محوری برای سه دسته ذرات در ضریب اصطکاک $\mu = ۰/۷۵$

خلاصه نتایج عددی به دست آمده از نمودارها، در جداول ۷ و ۸ آورده شده است. در جدول ۷ مقادیر ماکریم زاویه اصطکاک داخلی بسیج شده برای سه نمونه در ضرائب اصطکاک مختلف آورده شده است. با افزایش ضریب اصطکاک از ۰ تا $۰/۷۵$ ، مقدار ماکریم زاویه اصطکاک داخلی بسیج شده برای ذرات تیز گوشه و ذرات با گوشه داری متوسط حدود ۲۵ درجه و برای ذرات گرد گوشه حدود ۲۰ درجه افزایش یافته است. همچنین در یک ضریب اصطکاک مشخص بزرگتر از صفر، ماکریم زاویه اصطکاک داخلی بسیج شده برای ذرات تیز گوشه حدود ۴ تا ۵ درجه بزرگتر از ذرات با گوشه داری متوسط و حدود ۹ تا ۱۱ درجه بزرگتر از ذرات گرد گوشه می‌باشد. جدول ۸

افزایش یافته است. این نتایج منطبق با نتایج بیان شده در بخش قبل می‌باشند. در حالتی که اصطکاک منظور نمی‌شود ($\mu = 0$)، مقاومت‌های به دست آمده تنها ناشی از قفل و بسط بین ذرات می‌باشند. در ذرات تیز گوشه به دلیل قفل و بسط بیشتر بین ذرات مقاومت بیشتری نسبت به دیگر ذرات دیده می‌شود، در ذرات با گوشه داری متواتر این مقاومت اندکی بیشتر از ذرات گرد گوشه به دست آمده است. همان‌طور که دیده می‌شود افزایش مقاومت برشی با افزایش گوشه داری ذرات در ضرائب اصطکاک بزرگتر از صفر، محسوس‌تر از افزایش آن در ضریب اصطکاک صفر می‌باشد.



(1)



(2)

شکل ۷: نمودارهای

 $\text{Sin}\phi_{\text{mobilized}}$ (۱)

(۲) کرنش حجمی نسبت به کرنش محوری برای ذرات تیز گوشه در ضرائب اصطکاک مختلف

نتایج آزمایش‌های با نسبت تخلخل‌های مختلف

نمودارهای به دست آمده برای ذرات تیز گوشه در نسبت تخلخل‌های مختلف در شکل ۹ و مقادیر ماکریم زاویه اصطکاک داخلی بسیج شده و میزان انبساط در کرنش محوری ۱۸٪ برای هر دسته از ذرات در نسبت تخلخل‌های مختلف در جدول ۹ آورده شده است. با توجه به نمودارها و جدول نتایج زیر به دست می‌آید:

- مقاومت برشی باکاهش نسبت تخلخل و افزایش تراکم مجموعه برای هر سه دسته ذرات، افزایش می‌یابد که علت این امر افزایش سطح تماس و قفل و بسط بین ذرات می‌باشد. هم چنین با افزایش تراکم مجموعه، ماکریم مقاومت برشی در کرنش‌های محوری کوچکتری رخ داده است. همان طور که دیده می‌شود، مقاومت برشی مانده برای هر دسته از ذرات در نسبت تخلخل‌های مختلف تقریباً یکسان می‌باشد.
- با کاهش نسبت تخلخل و افزایش تراکم، نمونه‌ها رفتار اتساعی‌تری از خود نشان می‌دهند، همان‌طوری که دیده می‌شود میزان کاهش حجم در حین انجام آزمایش دو محوری برای نمونه‌های متراکم‌تر کمتر می‌باشد و در کرنش‌های محوری کوچکتری انبساط آنها آغاز شده و میزان انبساط نیز بیشتر می‌باشد.

میزان انبساط نمونه‌ها را در ضرائب اصطکاک مختلف و در کرنش محوری ۱۸٪ نشان می‌دهد. در حالت بدون اصطکاک به دلیل آن که نمونه‌ها در کرنش‌های محوری کمتر به حجم نسبتاً ثابتی رسیده بودند و پس از آن تغییر حجم نداشتند، میزان انبساط نمونه‌ها در این کرنش‌های کمتر در جدول لحاظ شده است. با افزایش ضربی اصطکاک از صفر تا ۷۵٪، میزان انبساط نمونه‌ها حدود ۵ تا ۸ درصد افزایش یافته است. هم چنین در یک ضربی اصطکاک مشخص در میزان انبساط ذرات تیز گوشه ۵٪ تا ۲/۵ درصد افزایش نسبت به ذرات با گوشداری متوسط و ۰/۵ تا ۳/۵ درصد افزایش نسبت به ذرات گرد گوشه دیده می‌شود.

جدول ۷. مقادیر حداکثر زاویه اصطکاک برای نمونه‌هادر ضرائب اصطکاک مختلف

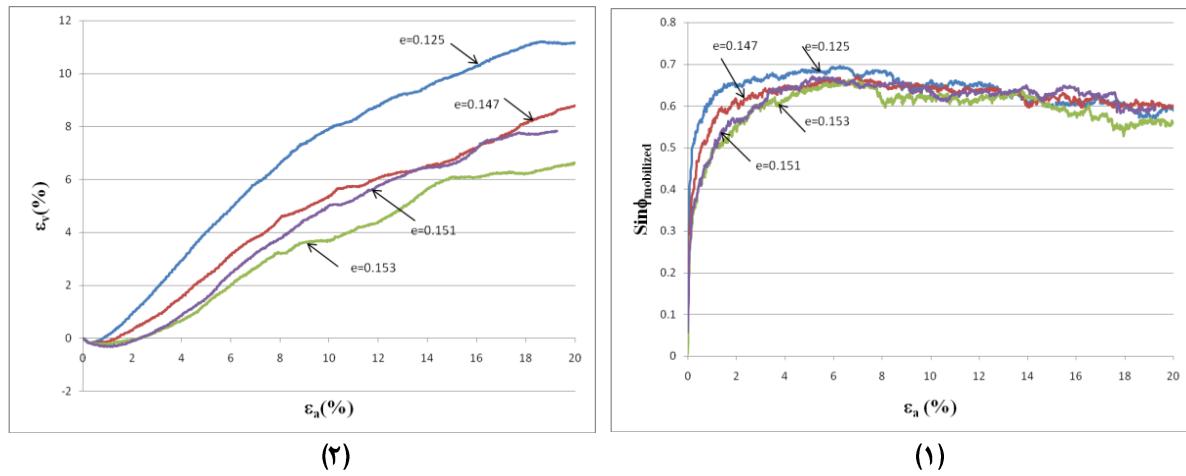
Friction coefficient (μ)	$(\Phi_{mobilized})_{max}$		
	High angular grains	Medium angular grains	Round grains
0	18.3°	14.3°	12.9°
0.25	34.6°	30.2°	25.2°
0.5	41.5°	36.8°	30.4°
0.75	44°	38.7°	33.2°

جدول ۸. مقادیر انبساط برای نمونه‌ها در ضرائب اصطکاک مختلف

Friction coefficient (μ)	Dilation value in $\epsilon_a=18\%$		
	High angular grains	Medium angular grains	Round grains
0	1%	0.5%	0.6%
0.25	3.3%	2%	0.7%
0.5	6.2%	5.5%	3.9%
0.75	8.8%	6.3%	5.3%

جدول ۹. مقادیر زاویه اصطکاک ماکریم و انبساط برای نمونه‌ها در نسبت تخلخل‌های مختلف

High angular grains			Medium angular grains			Round grains		
e	$(\phi)_{max}$	Dilation	e	$(\phi)_{max}$	Dilation	e	$(\phi)_{max}$	Dilation
0.125	44°	11.1%	0.107	39.9°	8.2%	0.089	37.5°	8%
0.147	42.2°	8.1%	0.126	38.9°	7%	0.123	32.9°	5.1%
0.151	42.1°	7.7%	0.136	37°	5.3%	0.131	30.5°	3.9%
0.153	41.5°	6.2%	0.137	36.8°	5.5%	0.133	31.2°	3.8%



شکل ۹: نمودارهای

 $\sin\phi_{mobilized}$ (۱)

(۲) کرنش حجمی نسبت به کرنش محوری برای ذرات تیز گوش نسبت تخلخل های مختلف

حاصل از آزمایش های برش مستقیم که توسط Taylor(1948) بر روی ماسه ها انجام شده است در شکل ۱۰ نشان داده شده است که کاهش زاویه اصطکاک را با افزایش تنش عمودی و کاهش تراکم نشان می دهد [۲۰]. نتایج حاصل از انجام آزمایش ها توسط Leps(1970) بر روی ماسه ها و خاک های درشت دانه تر نیز در شکل ۱۱ نشان داده شده است که همین روند در این نمودار نیز دیده می شود [۲۱].

مقایسه نتایج با نتایج تحقیقات قبلی

رونده تغییر زاویه اصطکاک با تغییر زاویه داری ذرات به صورت تجربی و آزمایشگاهی توسط محققان مختلفی مورد بررسی قرار گرفته است [۱۷ - ۱۹]. جدول ۱۰ نتایج به دست آمده توسط Sowers & Sowers را برای ماسه با دانه های گرد گوش و تیز گوش و برای حالت های خوب دانه بندی شده و با دانه بندی یکنواخت را در دو حالت شل و متراکم نشان می دهد [۱۹].

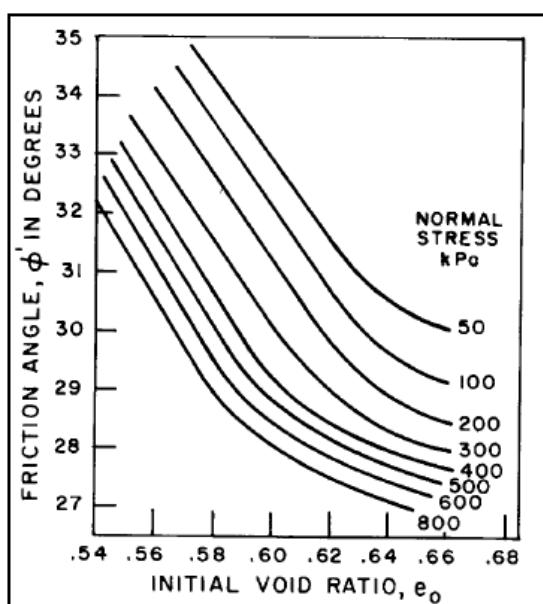
جدول ۱۰: مقادیر حداکثر زاویه اصطکاک مؤثر برای ماسه در حالات مختلف [۱۹]

**Effect of Angularity and Grading on Peak Effective Friction Angle of Coarse Sand in Degrees
(e.g. Sowers and Sowers, 1951)**

Shape and Grading	Symbol	Loose	Dense
Rounded, Uniform	SP	30	37
Rounded, Well Graded	SW	34	40
Angular, Uniform	SP	35	43
Angular, Well Graded	SW	39	45

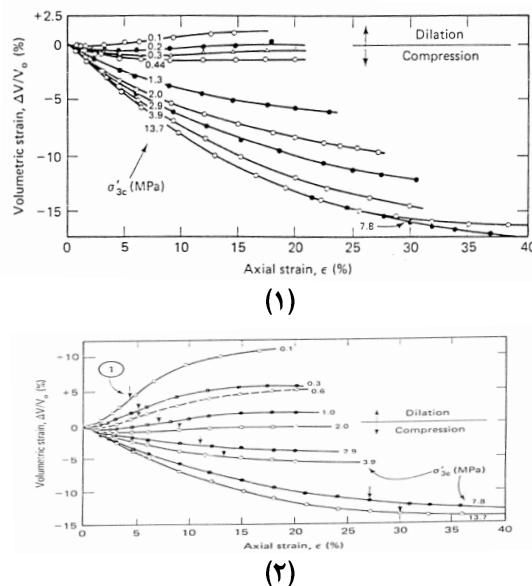
همان طور که دیده می شود، تطابق خوبی بین نتایج به دست آمده و نتایج این جدول موجود است، روند افزایش زاویه اصطکاک با افزایش زاویه داری و افزایش تراکم نیز به طور واضح در این جدول مشهود می باشد.

تأثیرات تنش بر زاویه اصطکاک داخلی نیز در مطالعات آزمایشگاهی متعددی مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج



شکل ۱۰: تغییرات زاویه اصطکاک با تغییرات تنش و نسبت تخلخل [۲۰]

کرنش حجمی افزایش یافته است اما در ضرایب اصطکاک بالاتر تأثیر آن کاهش یافته است [۲۴]. نتایج به دست آمده از آزمایش‌های شبیه‌سازی شده در این مطالعه نیز با این نتایج تطبیق دارند.

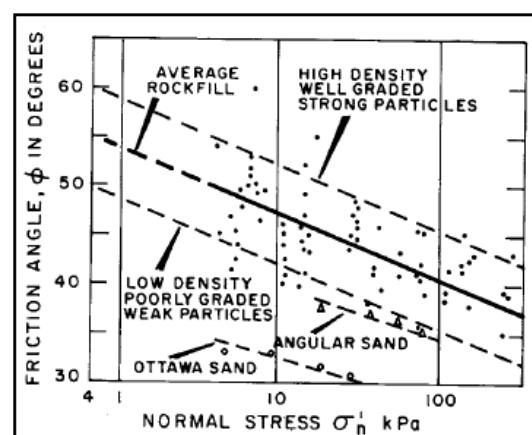


شکل ۱۲: نمودارهای کرنش حجمی در برابر کرنش محوری برای نمونه‌های ماسه‌ای در فشارهای همه‌جانبه مختلف و با تراکم نسبی ۳۸(۱) درصد [۲۲] و ۱۰۰(۲) درصد [۲۲]

نتیجه گیری

در این مقاله یک روش برای مدل‌سازی مستقیم شکل ذرات معرفی گردید. سپس سه دسته از ذرات با زاویه‌داری‌های مختلف انتخاب و با این روش مدل‌سازی شدند. مجموعه‌هایی متشكل از ۱۰۰۰ ذره برای هر دسته از ذرات ایجاد شدند و آزمایش‌های دو محوری در فشارهای همه‌جانبه مختلف، ضرائب اصطکاک مختلف و نسبت تخلخل‌های مختلف برروی هر مجموعه انجام شدند. خلاصه نتایج آزمایش‌ها به شرح زیر می‌باشد:

- برای ذرات با زاویه‌داری‌های مختلف، زاویه اصطکاک داخلی بسیج شده و انبساط با افزایش فشار همه‌جانبه کاهش می‌یابد.
- در یک فشار همه‌جانبه مشخص، مقاومت برشی (یا زاویه اصطکاک بسیج شده)، انبساط و مقاومت برشی مانده با افزایش گوشیداری ذرات به طور قابل ملاحظه‌ای افزایش



شکل ۱۱: تغییرات زاویه اصطکاک با تغییرات تنش [۲۱]

نتایج حاصل از مطالعات آزمایشگاهی تغییر حجم نمونه‌هایی از ماسه رودخانه Sacramento با لحاظ نمودن اثر نسبت تخلخل و فشار همه‌جانبه در آزمایش سه‌محوری فشاری زهکشی شده، در شکل ۱۲ نشان داده شده است [۲۲]. همان‌طور که در این شکل دیده می‌شود، در یک تراکم معین با کاهش تنش همه‌جانبه میزان کاهش حجم نمونه‌ها کاهش یافته است و در منحنی‌ها رفتار انساعی دیده می‌شود، به گونه‌ای که در فشارهای همه‌جانبه خیلی کوچک نمونه‌ها افزایش حجم یافته‌اند. هم چنین در یک فشار همه‌جانبه معین، نمونه‌های با تراکم نسبی بیشتر، کاهش حجم کمتر و انبساط بیشتری نسبت به نمونه‌های با تراکم نسبی کمتر یافته‌اند. این نتایج با نتایج به دست آمده از آزمایش‌های شبیه‌سازی شده به طور کیفی کاملاً مطابقت می‌کنند.

تأثیرات ضرایب اصطکاک مختلف بر رفتار مکانیک خاک‌ها عمدهاً به صورت عددی و محاسباتی مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج یک کار تحقیقی که توسط Skinner بر روی مجموعه‌ای دلخواه از ذرات کروی در اصطکاک‌های مختلف انجام شده است و نتایج حاصل از محاسبات عددی، نشان می‌دهند که به غیر ازمواردی که ضرائب اصطکاک خیلی کوچک انتخاب می‌شوند، میزان تأثیر ضرائب اصطکاکی مختلف بر رفتار ماکروسکوپیک مصالح دانه‌ای ناچیز می‌باشد [۲۳]. نتایج حاصل از یک Kruyt & Rothenburg کار عددی به روش اجزا مجزا که توسط شکل در ضرائب اصطکاک مختلف انجام شده است، نشان می‌دهد که با افزایش ضریب اصطکاک، مقاومت برشی و

▪ برای ذرات با زاویه‌داری‌های مختلف، مقاومت برشی و انبساط با افزایش میزان تراکم افزایش می‌یابند، اما تراکم‌های مختلف تأثیری بر مقاومت برشی مانده نمی‌گذارند.

نتایج به دست آمده در اکثر موارد تطابق بسیار خوبی با نتایج گزارش شده از مطالعات آزمایشگاهی داشتند. تنها تفاوت اصلی مربوط به این بود که در نتایج تجربی، از کاهش میزان تأثیر زاویه‌داری ذرات بر رفتار مکانیکی با افزایش تنش همه جانبه به دلیل شکست ذرات اشاره شده است. اما در این مطالعه به دلیل مدل نشدن شکست ذرات چنین رفتاری مشاهده نشد.

می‌یابند، با افزایش تیز گوشگی ذرات از میزان تأثیر گوشهداری بر مقاومت برشی مانده کاسته می‌شود.

▪ برای ذرات با زاویه‌داری‌های مختلف، مقاومت برشی، مقاومت برشی مانده و انبساط با افزایش ضریب اصطکاک افزایش می‌یابند، اما میزان تأثیر ضرائب اصطکاکی مختلف با افزایش ضریب اصطکاک کاهش می‌یابد.

▪ در یک ضریب اصطکاک مشخص، مقاومت برشی، مقاومت برشی مانده و انبساط با افزایش گوشهداری ذرات افزایش می‌یابند، اما افزایش تیز گوشگی ذرات از میزان تأثیر گوشهداری بر مقاومت برشی مانده کاسته می‌شود.

مراجع

1. Cundall, P. A., (1971), "A computer model for simulating progressive large scale movements in block rock systems", Proceedings of the Symposium of the International Society of Rock Mechanics, Nancy, Article 8.
2. Cundall, P. A., (1978), "Ball: A computer program to model granular media using the distinct element method", Technical note TN-LN-13, Advance Technology group. London: Dames and Moore.
3. Cundall, P. A., and Strack O. D. L., (1979), "A discrete numerical model for granular assemblies", Geotechnique, Vol. 29, pp. 47-65.
4. Rothenburg, L., and Bathurst, R.J., (1992), "Micromechanical features of granular assemblies with planer elliptical particles", Geotechnique, Vol. 42, No 1, pp. 79-95.
5. Ting, J., Khawaja, M., Meachum, L., and Rowell, J., (1993), "An ellipse-based discrete element model for granular materials", International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, Vol. 17, pp. 603-623.
6. Ng, T.T., (1994), "Numerical simulation of granular soil using elliptical particles", Computers and Geotechnics, Vol. 16, No. 2, pp. 153-169.
7. Barbosa, R, and Ghaboussi, J., (1992), "Discrete finite element method", Engineering Computations, Vol. 9, pp 253-266.
8. Mirghasemi, A.A., Rothenburg, L., and Matyas, E.L., (1997), "Numerical simulations of assemblies of two-dimensional polygon-shaped particles and effects of confining pressure on shear strength", Soils & Foundations, Vol. 37, No 3, pp. 43-52.
9. Mirghasemi, A.A., Rothenburg, L., and Matyas, E.L., (2002), "Influence of particle shape on engineering properties of two-dimensional polygon-shaped particles", Geotechnique, Vol. 52, No 3, pp. 209-217.
10. Potapov, A, and Campbell, C. (1998), "A fast model for the simulation of non-round particles", Granular Matter, Vol. 1, pp 9-14.
11. Lin, X., and NG, T.T., (1997), "A three-dimensional discrete element model using arrays of ellipsoids", Geotechnique, Vol. 47, No. 2, pp. 319-329.
12. Favier, J., Abbaspour-Fard, M, Kremmer, M., and Raji, A., (1999), "Shape representation of axi-symmetrical, non-spherical particles in discrete element simulation using multi-element model paticles", Engineering Computations, Vol. 16, pp. 467-480.

13. Jensen, R., Bosscher, P., Plesha, M., and Edil, T., (1999), "DEM simulation of granular media-structure interface: effect of surface roughness and particle shape", International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, Vol. 23, pp. 531-547.
14. Matsushima, T. and Saomto, H., (2002), "Discrete element modeling for irregularly-shaped sand grains", Proc. NUMGE2002: Numerical methods in geotechnical engineering, Mestat (ed.), pp.239-246.
15. Rothenburg, L. and Bathurst, R.J., (1991), "Numerical Simulations of Idealized Granular Assemblies with plane Elliptical Particles", J. Computer and Geotechnics, 11, 315–329.
16. Fumagalli, E., Mosconi, B. and Rossi, P. P., (1970), "Laboratory tests on materials and static models for rockfill dams," 10th Int. Congress on large dams, Montreal, pp. 531-551.
17. Terzaghi, K., and Peck, R.B., (1948), "Soil mechanics in engineering practice", John Wiley and Sons, Inc., New York.
18. Chen, L.S., (1948), "An investigation of stress, strain and strength characteristics of cohesionless soils by triaxial compression tests, Proceedings, 2nd Int. Conf. on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Rotterdam, Vol.5, pp. 35- 48.
19. Sowers, G.B, and Sowers, G.F., (1970), "Introductory soil mechanics and foundations", Third Edition, The MacMillan Co., New York, P. 556.
20. Taylor, D.W., (1948), "Fundamentals of soil mechanics", John Wiley and Sons Inc., New York, P. 700.
21. Leps, R.M., (1970), "Review of shearing strength of rockfill", Journal of the Soil Mechanics ans Foundation Division, American Society of Civil Engineers, Volume 96, No SM4, Proceedings Paper7394, July 2970, pp. 1159-1170.
22. Lee, K.L., and Seed, H.B. (1967), "Drained strength characteristics of sands", Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, 93(6): 117-141.
23. Skinner, A.E., (1969), "A note on the influence of interparticle friction on the shearing strength of a random assembly of spherical particles", Géotechnique 1:150-157.
24. Kruijt, N.P., Rothenburg, L., (2004), "Micromechanical study of macroscopic friction and dissipation in idealised granular materials: the effect of interparticle friction", 21st International Conference on Theoretical and Applied Mechanics, Warsaw, Poland.