

# فرمول بندی المان تیر برای روش اجزاء محدود موجک-پایه

سید احسان نراقی\*<sup>۱</sup> و اسد ا... نورزاد<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup> فارغ التحصیل کارشناسی ارشد مهندسی سازه، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه تهران

<sup>۲</sup> استادیار دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه تهران

(تاریخ دریافت ۱۳۸۷/۰۶/۳۰، تاریخ دریافت روایت اصلاح شده ۱۳۹۰/۰۸/۲۱، تاریخ تصویب ۱۳۹۰/۰۹/۲۱)

## چکیده

در سال های اخیر، استفاده از آنالیز موجک برای حل عددی معادلات دیفرانسیل، مورد توجه قرار گرفته است. با توجه به خصوصیت بسیار مهم تعامد و فشردگی محمل در توابع موجک دبیچس، این توابع می توانند گزینه مناسبی برای تقریب زدن حل مسائل در تکیه های باشند و دقت مناسب و همگرایی را در حل این گونه مسائل تضمین نمایند. در این مقاله، نحوه استفاده از توابع موجک دبیچس برای حل عددی معادله دیفرانسیل تیر برنولی فرمول بندی شده است. این روند، به محاسبه مشتقات و انتگرال های توابع مقیاس دبیچس که به عنوان توابع شکل استفاده می شوند، نیاز دارد. به دلیل ماهیت نقطه به نقطه و همچنین نوسانات شدید این توابع، استفاده از روش های مرسوم محاسبه عددی مشتق و انتگرال، ممکن نیست و دقت لازم را ندارند. برای این منظور از تکنیک های مناسب استفاده شده است. در نهایت دقت بالای این روش توسط دو مثال بررسی شده است. این مثال ها نشان می دهند که المان تیر موجک- پایه دارای دقت محاسباتی بسیار بالایی برای تیرهایی با بارگذاری های مختلف، تغییر در مقطع و شرایط مرزی متفاوت می باشد.

**واژه های کلیدی:** روش اجزاء محدود موجک- پایه، توابع مقیاس دبیچس، بسط موجک.

## مقدمه

فشردگی محمل موجک ها این قابلیت را ایجاد می کند که در نواحی با تغییرات شدید، مثل تمرکز تنش، شرایط مرزی متغیر و ... حل مساله با ترفندهای پیچیده ای، بتواند درجه وضوح قابل قبول ارائه دهد.

استفاده از توابع موجک در حل عددی معادلات دیفرانسیل و روش اجزاء محدود، به محاسبه مشتقات توابع مقیاس موجک نیاز دارد. به دلیل عدم وجود فرمول های صریح برای توابع پایه ای موجک، فرآیندهای مختلف و متعددی برای محاسبه و تولید نقطه- نقطه آنها ارائه شده است که یکی از آنها الگوریتم موسوم به آبشار<sup>۲</sup> است که توسط دبیچس ارائه شده است [۹]. این الگوریتم به صورت تکراری عمل می کند و در هر بار تکرار، تخمین دقیق تری از توابع موجک و مشتقات آنها ارائه می کند و همگرایی در آن بصورت نمایی و بسیار سریع خواهد بود. در روش دیگری که توسط لین و همکاران [۱۰] ارائه شده است، با استفاده از یک الگوریتم مستقیم (و نه تکراری)، ابتدا مقادیر تابع مقیاس و مشتقات آن به صورت دقیق در نقاط صحیح محاسبه می شوند و سپس با به کار بردن رابطه دو مقیاسه (رابطه ۹) می توان مشتق توابع مقیاس و موجک را در همه نقاط غیر صحیح محاسبه کرد. روش مذکور

روش اجزاء محدود یکی از قدرتمندترین روش های حل معادلات دیفرانسیل است که در دهه های گذشته با پیشرفت امکانات کامپیوتری، توسعه و رواج بسیاری یافته است. یکی از مسایل کلیدی در روش اجزاء محدود، انتخاب فضای توابع جهت حل تقریبی است. در روش مرسوم اجزاء محدود، از چند جمله ای های مرتبه پایین برای تخمین و تقریب تغییر مکان ها استفاده می شود ولی دقت و سرعت همگرایی این روش در بسیاری از مسایل به ویژه مسایل مرتبط با انتشار امواج و گسترش ترک نامطلوب است و بایستی از فضای توابع مناسب تری استفاده نمود. روش اجزاء محدود موجک- پایه، با استفاده از توابع مقیاس خانواده موجک ها، رویکردی جدید در روش اجزاء محدود می باشد. توابع مقیاس موجک، می توانند همه توابع موجود در فضای هیلبرت<sup>۱</sup> را که شامل توابع ناپیوسته محدود که در حل بسیاری از مسایل بدرفتار وجود دارد را تقریب بزنند و این تقریب می تواند با توجه به مرتبه تابع مقیاس مورد استفاده، بسیار موفق و دقیق باشد. به همین دلیل است که این توابع توجه دانشمندان و مهندسان را در خصوص روش های حل عددی به خود جلب کرده اند و کاربرد آنها در این نوع روش ها روزافزون است [۱ - ۸].

دارای اشتباهات فرمول‌بندی برای محاسبه ضرایب ارتباطی می‌باشد. در این مقاله روش اجزاء محدود موجک- پایه برای المان تیر بطور مبسوط مورد بررسی قرار گرفته‌است. به منظور محاسبه مشتق توابع موجک در این مقاله از روش جانکسینگ ما و همکاران استفاده شده‌است. همچنین برای محاسبه انتگرال‌ها تکنیک ضرایب ارتباطی فرمول‌بندی شده‌است و اشتباهات فرمول‌بندی ذکر شده (در مرجع [۱]) تصحیح شده‌است و در نهایت به منظور اعتبار سنجی روش، دو مثال حل شده‌است. همچنین در این مقاله از قابلیت نوفه زدایی توابع موجک به منظور رسیدن به دقت بالاتر در حل مثال‌ها استفاده شده‌است. این مثال‌ها به خوبی توانایی اجزاء محدود موجک- پایه را نشان می‌دهند.

### بسط تابعی موجک<sup>۵</sup>

بیشتر توابع ریاضی، قابل نمایش به صورت جمع یک سری توابع بنیادین و ساده به نام توابع پایه هستند. این نوع نمایش را بسط تابعی می‌گویند. یکی از مثال‌های مشهور بسط تابعی در ریاضیات، بسط فوریه است:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{i2\pi kx}; x \in R \quad (1)$$

در اینجا توابع پایه بسط عبارتند از توابع نمایی مختلط  $e^{i2\pi kx}$  که هر یک نمایشگر یک فرکانس مشخص ( $k$ ) هستند. ضرایب  $c_k$  به صورت انتگرال زیر محاسبه می‌شوند:

$$c_k = \int_0^1 f(x) e^{-i2\pi kx} dx \quad (2)$$

هر کدام از ضرایب  $c_k$  در واقع مقدار محتوای فرکانسی معادل فرکانس مشخص ( $k$ ) را در سیگنال و یا تابع  $f$  (در یک پیوند) نشان می‌دهند. به محاسبه  $c_k$  ها، تجزیه  $f$  به سری طرف راست معادله (۱)، بازسازی  $f$  گفته می‌شود. در تئوری، بازسازی  $f$  می‌تواند به صورت دقیق انجام شود ولی در عمل این اتفاق نادر است. به جز حالات خاصی که معادله بازسازی  $f$  به صورت تحلیلی محاسبه می‌شود، در اکثر موارد این معادله به صورت عددی و همراه با تقریب خواهد بود و به جای بازه  $(-\infty, +\infty)$  برای کاهش حجم محاسبات در رابطه (۱)، بازه

مخصوصاً برای محاسبه مشتقات توابع خانواده دب‌جس (db) نتایج بسیار خوبی می‌دهد. جانکسینگ ما و همکاران [۱] نیز روش مناسبی برای محاسبه مستقیم مشتقات توابع خانواده db ارائه داده‌اند. در روش آنها نیز ابتدا مقادیر تابع مقیاس و مشتقات آن به صورت دقیق در نقاط صحیح محاسبه می‌شوند و سپس با بکار بردن رابطه دو مقیاسه می‌توان مشتق توابع مقیاس و موجک را در همه نقاط غیر صحیح محاسبه کرد.

نکته مهم دیگر این است که اگر در روش اجزاء محدود موجک- پایه، از توابع مقیاس db استفاده شود به دلیل نوسانات شدید و نبود فرمول صریح برای این توابع و ماهیت نقطه نقطه آنها، روش‌های عددی انتگرال‌گیری مرسوم، مثل روش گوس، که برای محاسبه ماتریس سختی، ماتریس بار و غیره بکار می‌روند، نمی‌توانند دقت قابل قبولی را ایجاد کنند لذا برای محاسبه این انتگرال‌ها معمولاً از تکنیکی موسوم به ضرایب ارتباطی<sup>۴</sup> استفاده می‌شود. اولین بار داهمن [۱۱] توانست الگوریتمی را برای محاسبه این انتگرال‌ها ارائه دهد. ولی روش او فقط برای دامنه‌های نامحدود انتگرال‌گیری فرمول‌بندی شده بود. البته اندکی بعد خود او طی مقاله‌ای جداگانه روشش را برای دامنه‌های محدود با شرایط مرزی تناوبی اصلاح نمود. اما چن [۱۲] روش جامع‌تری را برای محاسبه انتگرال‌های حاصل از توابع موجک db درون حوزه‌های محدود معرفی کرد که علیرغم قابلیت خوب آن روش، به علت نوع حدودی که برای انتگرال انتخاب کرده بود، برای محاسبات مربوط به ماتریس سختی المان کاربرد نداشت. مونس و پریر [۱۳] توانستند فرمولی را جهت محاسبه انتگرال‌های مربوط به ماتریس بار بدست بیاورند هرچند که در روش خود از توابع موجک دیگری استفاده کرده بودند. قبل از آنها کو [۱۴] الگوریتمی را برای محاسبه نوعی ماتریس سختی ارائه کرده بود که کار آنها در واقع توسعه الگوریتم کو بود. در نهایت زوفنگ چن و همکاران [۲] بودند که روشی جدید و بسیار مؤثر را برای محاسبه ماتریس بار و سختی در فضای موجک ارائه دادند که از روش‌های قبلی هزینه محاسباتی کمتری را صرف می‌کرد.

بر پایه روش‌های پیش گفته، جانکسینگ ما و همکاران [۱] یک المان تیر را بر اساس توابع مقیاس db فرمول‌بندی و ارائه کردند. قابل ذکر است که مقاله آنها

همانطور که ملاحظه می‌گردد، تابع به دست آمده، نمی‌تواند بعضی از خصوصیات تابع اصلی را نشان دهد. برای مثال نمی‌تواند ناپیوستگی موجود در نقطه  $x=0.5$  را به خوبی نمایش دهد.

این مساله به دلیل ماهیت پیوسته توابع مورد استفاده در بسط فوریه رخ می‌دهد. در واقع ضعف توابع پایه بسط فوریه این است که همه آنها تمام دامنه را می‌پوشانند و تفاوت آنها فقط در فرکانس آنهاست. به همین دلیل این توابع نمایی مختلط، خیلی خوب می‌توانند یک تابع متناوب معمولی را تقریب بزنند ولی اصلا توابع مناسبی برای تقریب زدن یک تابع ناپیوسته نیستند و به دلیل اینکه ضرایب  $c_k$  بیانگر میانگین محتوای فرکانسی  $k$  هستند، هیچ‌گاه محل دقیق تکینگی موجود در تابع و یا سیگنال مورد نظر نمایان نمی‌شود.

مساله‌ای که مطرح شد، یکی از انگیزه‌های استفاده از موجک‌هاست. موجک‌ها هم مانند توابع نمایی مختلط می‌توانند به عنوان تابع پایه برای بسط تابع  $f$  مورد استفاده قرار گیرند. بر خلاف توابع نمایی مختلط، موجک‌ها می‌توانند هم اطلاعات مکانی و هم اطلاعات مقیاسی قابل توجهی را در مورد  $f$  ارائه کنند. بسط موجک برای یک تابع  $f$  با دوره تناوب واحد به صورت زیر است [۹]:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{2^j-1} C_{J_0,k} \tilde{\Phi}_{J_0,k}(x) + \sum_{j=J_0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^j-1} d_{j,k} \tilde{\Psi}_{j,k}(x), \quad x \in R \quad (5)$$

این بسط نیز مانند بسط فوریه، یک ترکیب خطی از یک دسته توابع پایه است. ضرایب این بسط عبارتند از [۹]:

$$c_{J_0,k} = \int_0^1 f(x) \tilde{\Phi}_{J_0,k}(x) dx \quad (6)$$

$$d_{j,k} = \int_0^1 f(x) \tilde{\Psi}_{j,k}(x) dx$$

اولین تفاوت بسط موجک با بسط فوریه این است که در آن دونوع تابع پایه وجود دارد:  $\tilde{\Phi}_{J_0,K}$  که تابع مقیاس نام دارد و  $\tilde{\Psi}_{j,k}$  که تابع موجک نام دارد. هر دو این توابع، محمل‌هایی فشرده<sup>۱</sup> دارند و برای محدوده مشخصی

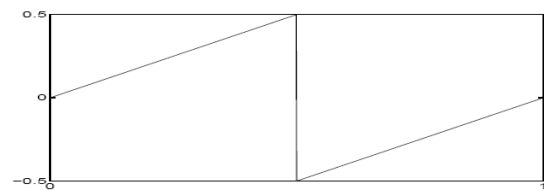
$(-\frac{N}{2}+1, \frac{N}{2})$  مطابق رابطه (۳) برای آن در نظر گرفته می‌شود که در آن  $N$  دلخواه است.

$$f(x) \approx \sum_{k=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} c_k e^{i 2\pi k x} \quad (3)$$

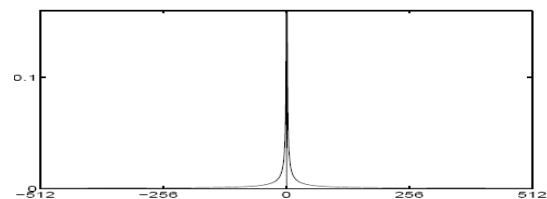
به علاوه، به علت صرفه‌جویی در فضاهای محاسباتی، تمایل به حذف ضرایب کوچک وجود دارد. به همین علت خطای تقریب پدیدار می‌شود. به عنوان مثال تابع دندانهای زیر را در نظر می‌گیریم:

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < 0.5 \\ x-1 & 0.5 \leq x < 1 \end{cases} \quad (4)$$

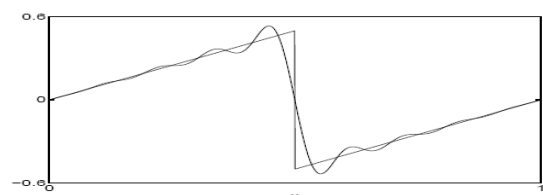
این تابع در شکل (۱) نشان داده شده‌است. تجزیه فوریه تابع فوق برای  $N=1024$  در شکل (۲) نمایش داده شده است. اگر برای مثال ۱۷ عدد از بزرگترین ضرایب  $c_k$  را لحاظ کنیم و با آنها تابع  $f$  را بازسازی کنیم، به شکل (۳) می‌رسیم.



شکل ۱: نمایش تابع دندانهای



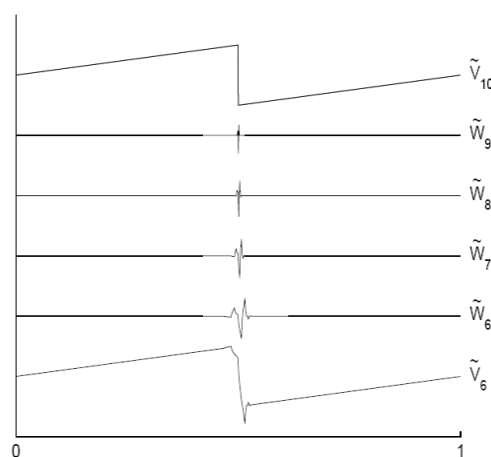
شکل ۲: ضرایب مربوط به بسط فوریه تابع  $f(x)$



شکل ۳: نمایش بسط فوریه تابع  $f$  با ۱۷ ضریب بزرگ

می‌دهند و وقتی همه آنها را با هم جمع کنیم، تقریب  $f$  در فضای  $\tilde{V}_{10}$  حاصل می‌شود که گویای خصوصیات مهم تابع  $f$  از قبیل ناپیوستگی آن هست.

بامقایسه این شکل‌ها با شکل‌های مربوط به بسط فوریه می‌توان نتیجه گرفت که بسط موجک قابلیت بسیار مهم تقریب با وضوح چندگانه را داراست که آن را به ابزار قدرتمندی برای بیان خصوصیات توابع و سیگنال‌ها و توصیف پدیده‌ها تبدیل می‌کند.



شکل ۴: بسط تابع دندانه‌ای در فضای موجک

## فرمول‌بندی روش اجزاء محدود بر اساس توابع مقیاس db

### خصوصیات توابع خانواده db

توابع موجک خانواده db که دارای محمل‌های فشرده و محدودی هستند، قابلیت تخمین چند جمله‌ای‌های با درجه بالا را دارا می‌باشند. این پایه‌های موجکی می‌توانند نمایش قابل اتکا و پایداری را از توابع دیفرانسیلی حتی در نواحی دارای تغییرات شدید، فراهم کنند. به‌علاوه، قابلیت وضوح چندگانه نیز مزیت مهمی است که باید به سایر مزایای آنها افزود. در ادامه به معرفی توابع موجک این خانواده و شرح مزایای آنها می‌پردازیم. به دلیل دو خاصیت تعامد و فشرده‌گی محمل، موجک‌های db می‌توانند جزئیات مسایل و پدیده‌ها را به صورت دقیق و صحیح توضیح دهند. مزیت دیگری که به دلیل محمل فشرده این موجک‌ها ایجاد می‌شود، این است که درجات آزادی المان‌های فرمول‌بندی شده بر اساس این موجک‌ها، کمتر از دیگر خانواده موجک‌هاست. بنابراین این المان‌ها

تعریف شده‌اند. دو پارامتر مهم در این نوع توابع وجود دارند  $j$  که پارامتر مقیاس است و  $k$  که پارامتر انتقال است. پارامتر مقیاس، عرض محمل و پارامتر انتقال، مکان محمل را مشخص می‌کنند. در ادبیات موجک، هیچ‌گونه فرمول صریحی برای  $\tilde{\Psi}_{j,k}$  و  $\tilde{\Phi}_{j,k}$  وجود ندارد. اما مقادیر این دو تابع قابل محاسبه هستند و در نتیجه ضرایب  $c$  و  $d$  نیز محاسبه می‌شوند [۹].

ضریب  $c_{J_0,k}$ ، ضریب مربوط به تابع مقیاس است و تقریب تابع  $f$  را مشخص می‌کند. اما ضریب  $d_{j,k}$  بیان‌کننده اطلاعاتی است که در تقریب ایجاد شده توسط تابع مقیاس، از دست رفته است که به آن جزئیات گفته می‌شود. بسط موجک هم باید با تعداد جملات محدودی نوشته شود و درجه وضوح آن محدود شود تا قابل محاسبه به صورت عددی باشد. پس به صورت زیر نوشته می‌شود [۹]:

$$\sum_{k=0}^{2^{J_0}-1} c_{J_0,k} \tilde{\Phi}_{J_0,k}(x) + \sum_{j=J_0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} d_{j,k} \tilde{\Psi}_{j,k}(x) \quad (7)$$

حاصل جمع

اول، نمایش تقریبی تابع  $f$  است که  $f$  را به صورت ترکیب خطی از  $2^{J_0}$  عدد، تابع مقیاس جابه‌جایی یافته نشان می‌دهد. تا اینجا کار مثل بسط فوریه است که فقط توانسته است فرکانس‌های پایین را تصویر کند. اما ترم دوم این بسط، بیانگر جزئیات است. هر یک از  $J$ ها، یک لایه یا یک درجه وضوح را نشان می‌دهند که در آن لایه،  $2^j$  عدد، از توابع موجک انتقال یافته به عنوان توابع پایه برای نشان دادن جزئیات بیشتری از  $f$  به کار رفته‌اند. به این ترتیب، بهتر است دو فضای تقریب و جزئیات را به ترتیب به صورت زیر تعریف کنیم [۹]:

$$\tilde{V}_j = \text{Span}\{\tilde{\Phi}_{j,k}\}_{k=0}^{2^j-1} \quad (8)$$

$$\tilde{W}_j = \text{Span}\{\tilde{\Psi}_{j,k}\}_{k=0}^{2^j-1}$$

شکل (۴) نیز تجزیه تابع دندانه‌ای رابطه (۳) را در فضای موجک نشان می‌دهد. چنانچه در این شکل، پایین‌ترین نمودار، تابع  $f$  را در فضای  $\tilde{V}_6$  تقریب زده است و نمودارهای بالایی جزئیات را در فضای  $\tilde{W}_6$  تا  $\tilde{W}_9$  نشان

تابع مقیاس و تابع موجک متناظرش متعامد هستند. در میان روابط فوق‌الذکر، رابطه ممان‌های صفر، خاصیت ویژه گروه موجک‌های db را بیان می‌کند. این رابطه به همراه روابط دو مقایسه، نتیجه می‌دهند که تابع مقیاس db، می‌تواند به طور دقیق، هر چند جمله‌ای را که مرتبه‌اش کوچک‌تر و یا مساوی  $1 - (N/2)$  را نشان دهد. یعنی اگر  $f(x)$  به صورت زیر باشد،

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_{\frac{N}{2}-1} x^m \quad (17)$$

$$m \leq \frac{N}{2} - 1$$

تابع  $f$  می‌تواند به صورت زیر، به طور دقیق نمایش داده شود:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \phi(x-k) \quad (18)$$

رابطه فوق که بیانگر یکی از قابلیت‌های مهم خانواده db است، یکی از اساسی‌ترین روابطی است که روش اجزاء محدود موجک- پایه براساس آن شکل گرفته است و توسعه یافته است [۱].

#### محاسبه مشتقات توابع مقیاس db

برای فرمول‌بندی روش اجزاء محدود موجک- پایه بر اساس توابع db، ابتدا لازم است که مشتقات تابع مقیاس محاسبه شوند. به دلیل اینکه برای تابع مقیاس، فرمول محاسباتی وجود ندارد و این توابع به صورت نقطه نقطه محاسبه می‌شوند، روش‌های معمول مشتق‌گیری عددی جواب‌های دقیقی بدست نمی‌دهند. خطای این روش‌ها مخصوصاً در مشتق‌گیری مراتب دوم و بیشتر خیلی چشمگیرتر می‌شود [۱۰].

ابتدا لازم است اشاره‌ای به رابطه دو مقیاسه (۹) داشته باشیم. اگر از این رابطه،  $m$  بار مشتق‌گیری شود، رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\phi^{(m)}(x) = 2^m \sum_{i=0}^{N-1} p_i \phi^{(m)}(2x-i) \quad (19)$$

رابطه (۱۹) در نقاط صحیح دامنه  $[0, N-1]$ ، معادله ماتریسی زیر را نتیجه می‌دهد:

می‌توانند قابلیت خیلی خوبی برای توصیف و تحلیل مسایل و پدیده‌ها با تغییرات شدید داشته باشند [۳]. برای ساخت المان‌های موجک پایه با موجک‌های (db)، ابتدا خصوصیات این موجک‌ها معرفی می‌شود. برای دریافت اطلاعات کامل‌تر و جامع‌تر می‌توان به مرجع [۱۵] مراجعه کرد:

۱- همانند سایر موجک‌ها، تابع مقیاس  $\phi(x)$  و تابع موجک  $\psi(x)$  در خانواده db، دو رابطه زیر را که روابط دو مقایسه نام دارند، ارضا می‌کنند:

$$\phi(x) = \sum_{i=0}^{N-1} p_i \phi(2x-i) \quad (9)$$

$$\psi(x) = \sum_{i=2-N}^1 (-1)^i p_{1-i} \phi(2x-i) \quad (10)$$

در این روابط،  $p_i$  ها ضرایب فیلتر نامیده می‌شوند.  $N$  یک عدد زوج است و  $i$  بین صفر تا  $N-1$  تغییر می‌کند.

۲- دامنه تابع مقیاس و تابع موجک به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\text{supp} \phi_N = [0, N-1] \quad (11)$$

$$\text{supp} \psi_N = \left[1 - \frac{N}{2}, \frac{N}{2}\right] \quad (12)$$

۳- این دو تابع با توجه به فرآیند تولید خانواده db خواص زیر را دارا هستند:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx = 1 \quad (13)$$

انرژی تابع مقیاس به صورت واحد نرمالیزه شده است.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x-j) \phi(x-m) dx = \delta_{j,m} \quad (14)$$

تابع مقیاس، در دامنه محمل خودش، یک پایه متعامد را شکل می‌دهد.

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^k \psi(x) dx = 0 \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (15)$$

این رابطه، ممان‌های صفر تابع موجک را بیان می‌کند.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \psi(x-m) dx = 0 \quad m \in Z \quad (16)$$

سپس با تغییر متغیر  $2x-k=y$  و بسط مکلورن برای  $(y+k)^i$  در نهایت به رابطه زیر می‌رسیم:

$$A_i = \frac{1}{2^{(i+1)}} \left( \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^i C_i^j k^{i-j} p_k A_j + \sum_{k=0}^{N-1} p_k A_i \right)$$

$$\Rightarrow A_i = \frac{1}{2^{(i+1)} - 2} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{i-1} C_i^j k^{i-j} p_k A_j \quad (26)$$

با محاسبه  $A_m, \dots, A_2, A_1, A_0$  و قرار دادن آنها در رابطه (۲۴) می‌توان  $c_k^m$  را محاسبه کرد. سپس با  $m$  بار مشتق‌گیری از رابطه (۲۲) به نتیجه زیر می‌رسیم:

$$\sum_{k=0}^{N-1} c_k^m \phi^{(m)}(x-k) = m! \quad (27)$$

رابطه (۲۷) همان رابطه نرمالایز کننده جواب معادله (۲۰) است. بدین ترتیب مشتقات  $\phi^{(m)}(i)$  برای نقاط صحیح یعنی  $i = 0, 1, \dots, N-1$  به دست می‌آید و در نهایت با بکار بردن دوباره رابطه دو مقایسه، می‌توانیم مقادیر مشتق را در نقاط غیرصحیح با پایه  $1/2$  محاسبه کنیم:

$$\phi^{(m)}\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} 2^m p_k \phi^{(m)}(x-k) \quad (28)$$

رابطه (۲۸) می‌تواند مقادیر  $\phi^{(m)}(x)$  را در  $x = i/2^n$  که  $n \in \mathbb{Z}$  و  $i = 1, 3, 5, \dots, N-2$  محاسبه کند.

### المان تیر موجک- پایه

در این بخش، تابع مقیاس db برای ساخت یک المان تیر مورد استفاده قرار می‌گیرد. برای مساله خمشی یک تیر برنولی، بعد از اینکه تیر به صورت تعدادی المان محدود جداسازی شد، هر المان به دامنه استاندارد  $[0, 1]$  انتقال می‌یابد. در این دامنه، معادله دیفرانسیل خمشی تیر به صورت زیر در می‌آید:

$$EI \frac{d^4 w}{d\xi^4} = f(\xi) \quad (29)$$

$$(2^m P - I)\Phi^{(m)} = 0 \quad (20)$$

که در آن  $I$  ماتریس همانی است و  $P$  و  $\Phi^{(m)} = [\phi^{(m)}(0), \phi^{(m)}(1), \dots, \phi^{(m)}(N-1)]^T$  ماتریسی است که از ضرایب فیلتر تشکیل شده است.  $P$  می‌تواند به صورت زیر بیان شود:

$$P = [p_{2i-k}] \quad 0 \leq i, k \leq N-1 \quad (21)$$

در رابطه فوق اگر  $2i-k < 0$  یا  $2i-k > N-1$ ، آنگاه  $p_{2i-k} = 0$  می‌شود. البته حل معادله (۲۰) که یک معادله مقدار ویژه است، یکتا نخواهد بود و برای یکتا کردن جواب آن لازم است معادله‌ای دیگر به دست‌آید که در ادامه شرح داده می‌شود.

اگر در معادله (۱۸)، تابع  $f(x)$  را به صورت  $f(x) = x^m$  و  $m \leq (N/2)-1$  فرض کنیم، داریم:

$$\begin{aligned} x^m &= \sum_k c_k^m \phi(x-k) \\ f(x) &= \sum_{i=0}^{\infty} (x)^i \frac{f^{(i)}(0)}{i!} \\ \Rightarrow (x+k)^m &= \sum_{i=0}^m x^i \frac{m! k^{m-i}}{(m-i)! i!} \end{aligned} \quad (22)$$

$$C_m^i = \frac{m!}{i! (m-i)!}$$

$$\Rightarrow c_k^m = \sum_{i=0}^m C_m^i k^{m-i} \int_{-\infty}^{\infty} x^i \phi(x) dx \quad (23)$$

$$= \sum_{i=0}^m C_m^i k^{m-i} A_i \quad (24)$$

$$A_i = \langle x^i, \phi(x) \rangle \quad (i = 0, 1, 2, \dots, m) \quad (25)$$

برای محاسبه  $A_i$  می‌توان رابطه دو مقیاسه را درون رابطه فوق قرار داد که منجر به رابطه زیر می‌شود:

$$A_i = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) x^i dx \Rightarrow A_i = \sum_{k=0}^{N-1} p_k \int_{-\infty}^{\infty} \phi(2x-k) x^i dx$$

که در آن تابع مشخصه عبارتست از:

$$\chi_{[0,1]} \left( \frac{1}{2} \gamma \right) = \begin{cases} 1 & 0 \leq \gamma \leq 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (34)$$

رابطه (۳۴) را می توان به صورت تک جمله ای زیر درآورد:

$$\chi_{[0,1]} \left( \frac{1}{2} \gamma \right) = \chi_{[0,1]}(\gamma) + \chi_{[0,1]}(\gamma - 1) \quad (35)$$

با توجه به معادله (۳۲)، معادله (۳۳) را می توان برحسب ضرایب ارتباطی بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned} \Gamma_{i,j} &= 8 \sum p_l p_m [\Gamma_{2i+l, 2j+m} + \Gamma_{2i+l-1, 2j+m-1}] \\ &= \sum_{r,s} [p_{r-2i} p_{s-2j} + p_{r-2i+1} p_{s-2j+1}] \Gamma_{r,s} \end{aligned} \quad (36)$$

چنانچه معادله فوق را به صورت ماتریسی بیان کنیم، داریم:

$$\Gamma = P \times \Gamma \quad (37)$$

ماتریس  $\Gamma$  یک ماتریس ستونی است که به صورت  $\Gamma_{i,j}$  مرتب شده است و  $P$  از ضرایب موجک طبق معادله (۳۶) تشکیل شده است. معادله (۳۷) نیز همانند معادله (۲۰) جواب یکتا ندارد و برای یکتایی جواب آن، به معادلات بیشتری نیاز است تا بتوان جواب آن را نرمالیزه کرد. برای این کار، از خواص تابع مقیاس db استفاده می شود تا به تعداد لازم معادلات غیرهمگن پدید آید. همان طور که قبلاً اشاره شد، تابع مقیاس db می تواند هر چند جمله ای با درجه کوچکتر یا مساوی  $(N/2)-1$  را دقیقاً نشان دهد که  $N$  طول دامنه تابع مقیاس است. پس طبق معادله (۲۲) و با دو بار مشتق گیری از آن می توان نوشت:

$$m(m-1)x^{m-2} = \sum_k c_k^m \phi''(x-k) \quad (38)$$

اگر دو طرف را به توان ۲ برسانیم و انتگرال گیری کنیم رابطه فوق را می توان به صورت زیر نیز نوشت:

$$\frac{mn(m-1)(n-1)}{m+n-3} = \sum_{k,s} c_k^m c_s^n \Gamma_{k,s} \quad (39)$$

در معادله فوق،  $w$ ، تغییر شکل جانبی تیر است و  $\xi$  مختصات محلی تیر است و  $EI$  هم نشان دهنده سختی خمشی تیر است.

مطابق مطالب پیش گفته، فرض می کنیم که  $w$  به وسیله یک سری از توابع مقیاس db تقریب زده می شود:

$$w = \sum_k \alpha_k \phi(\xi - k) \quad (30)$$

که  $\alpha_k$  ضرایب تقریب هستند که باید تعیین شوند. سپس ماتریس سختی در فضای  $[0,1]$  توسط رابطه زیر محاسبه می شود:

$$\tilde{k}_{e_{ij}} = EI \int_0^1 \phi''(\xi - i) \phi''(\xi - j) d\xi \quad (31)$$

در رابطه (۳۱)،  $\phi''(\xi - \bullet)$  نشان دهنده مشتق دوم تابع مقیاس است که بر حسب مختصات محلی  $\xi$  نوشته شده است. در این مرحله، به یک مساله اساسی برخورد می کنیم و آن محاسبه ماتریس سختی المان در فضای موجک است که به معنای محاسبه انتگرال رابطه (۳۱) است. به دلیل اینکه توابع موجک (شامل تابع مقیاس و تابع موجک) دارای ماهیت نقطه نقطه هستند، و نیز نوسانات و اعوجاجات شدیدی مخصوصاً در مشتقات آنها وجود دارد، روش های انتگرال گیری نقطه ای مثل روش گوس و ... برای آنها جواب دقیق و خوبی نمی دهد. روشی که برای محاسبه این انتگرال ها به کار می رود، روش محاسبه ضرایب ارتباطی نام دارد [۱۶]. در ادامه، محاسبه ماتریس سختی المان تیر ارائه شده است.

برای محاسبه انتگرال موجود در رابطه (۳۱)، ضرایب ارتباطی به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\Gamma_{i,j} = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{[0,1]}(\xi) \phi''(\xi - i) \phi''(\xi - j) d\xi \quad (32)$$

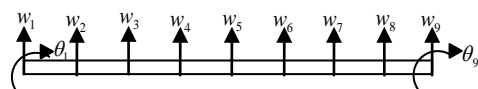
که  $\chi_{[0,1]}(\xi)$  تابع مشخصه نام دارد که تعریف آن در ادامه می آید. با جایگذاری رابطه دو مقیاسه درون رابطه فوق و تغییر متغیر  $\xi$  به  $\gamma$  به نتیجه زیر می رسیم:

$$\begin{aligned} \Gamma_{i,j} &= 8 \sum_{l,m} p_l p_m \int_{-\infty}^{\infty} [\chi_{[0,1]}(\gamma) + \chi_{[0,1]}(\gamma - 1)] \\ &\quad \times \phi''(\gamma - 2i - l) \phi''(\gamma - 2j - m) d\gamma \end{aligned} \quad (33)$$

وقتی از تابع مقیاس db6 برای تخمین تغییر مکان جانبی استفاده می‌شود، تغییر مکان جانبی در فضای  $[0,1]$  عبارتست از:

$$w = \sum_{k=-10}^0 \alpha_k \phi(\zeta - k) \quad (40)$$

زیرا این تابع مقیاس دارای دامنه از 0 تا N-1 است. ( $N=12$ ) بنابر این یازده k هستند که طبق رابطه فوق می‌توانند تخمین تغییر مکان جانبی را فراهم کنند. بنابر این درجات آزادی المان حاصل از db6 در فضای موجک، ۱۱ عدد است. بنابراین باید ۱۱ درجه آزادی مرتبط با آن در فضای فیزیکی وجود داشته باشد. برای ایجاد پیوستگی دوران در مرزها، لازم است که در درجه آزادی در دو انتهای تیر به صورت دورانی باشند. شکل (۵) نشان می‌دهد که این المان چگونه خواهد بود. همان‌طور که مشخص است، این المان دارای ۷ گره درونی و دو گره انتهایی است.



شکل ۵: المان تیر موجک- پایه db6

۷ گره درونی فقط دارای درجه آزادی تغییر مکانی هستند و المان را به ۸ قسمت مساوی تقسیم کرده‌اند و ۲ گره انتهایی نیز دارای درجات آزادی تغییر مکانی و دورانی هستند. پس در مجموع المان تیر حاصله شامل ۹ درجه آزادی تغییر مکانی و ۲ درجه آزادی دورانی به شرح زیر خواهد بود:

$$\delta = [w_1 \ \theta_1 \ w_2 \ w_3 \ w_4 \ \dots \ w_8 \ w_9 \ \theta_9]^T \quad (41)$$

ماتریس  $\delta$  نمایانگر درجات آزادی در فضای فیزیکی است. ارتباط بین درجات آزادی فیزیکی و موجکی را ماتریس انتقال T برعهده دارد:

$$\delta = Ta \quad (42)$$

که  $a$  ماتریس درجات آزادی در فضای موجک است.

$$a = [\alpha_{-10} \ \alpha_{-9} \ \alpha_{-8} \ \alpha_{-7} \ \dots \ \alpha_{-2} \ \alpha_{-1} \ \alpha_0]^T \quad (43)$$

با قرار دادن مقادیر مختلف  $m$  و  $n$  در رابطه (۳۹) و جایگذاری  $\Gamma_{k,s}$  حاصله در رابطه (۳۷)، می‌توان جواب یکتای  $\Gamma_{i,j}$  را بدست آورد.

معادله (۳۷) معمولاً بیش از یک مقدار ویژه برابر با یک دارد. برای محاسبه ضرایب ارتباطی مورد نظر باید تمام بردارهای ویژه متناظر با مقدار ویژه یک را در نظر گرفت. نکته قابل توجه آن است که حتی بردار ویژه‌هایی که متناظر با مقادیر ویژه مختلط هستند هم باید در نظر گرفته شوند به شرط آن که قسمت حقیقی مقدار ویژه آنها برابر با یک باشد.

به کمک رابطه (۳۹) و با مقادیر مختلف  $m$  و  $n$  دستگاه معادلاتی تشکیل می‌شود که با حل آن مقدار ضریبی که به هر یک از بردارهای ویژه متناظر با مقدار ویژه یک تعلق می‌گیرد مشخص می‌شود و در نهایت ضرایب ارتباطی نرمالیزه شده محاسبه می‌گردند. باتوجه به تعریف  $\Gamma_{i,j}$  در رابطه (۳۲)، می‌توان گفت که  $\tilde{k}_e$  در فضای  $[0,1]$  محاسبه شده‌است.

همان‌طور که پیداست، محاسبه ماتریس سختی در فضای موجک، بسیار سخت‌تر از محاسبه ماتریس سختی در روش مرسوم اجزاء محدود است. اما همان‌طور که ملاحظه می‌شود، ماتریس سختی المان در فضای موجک که از مقادیر ضرایب ارتباطی بدست می‌آید، ارتباطی به طول و مشخصات دیگر المان ندارد. بنابراین می‌توان ابتدا ضرایب ارتباطی را محاسبه و ذخیره کرد و سپس از آنها در محاسبه ماتریس سختی هر المان در جای خود استفاده نمود و این خود باعث بالا رفتن راندمان این روش از لحاظ هزینه‌های محاسباتی است.

بدیهی است که ماتریس سختی حاصل از رابطه (۳۱) در فضای موجک قرار دارد و درجات آزادی مربوط به آن، همان ضرایب تابع مقیاس  $\alpha_k$  هستند. برای ارضای شرایط مرزی و پیوستگی لازم در مرز مابین دو المان مجاور، ماتریس سختی باید از فضای موجک به فضای فیزیکی انتقال داده شود و در همین راستا، ضرایب تابع مقیاس باید به درجات آزادی فیزیکی که همان تغییر مکان‌ها و دوران‌های گرهی هستند، ربط داده شوند و تبدیل گردند. برای مثال یک المان تیر موجک پایه براساس موجک db6 مورد بحث قرار می‌گیرد تا نشان داده شود که چگونه ماتریس سختی از فضای موجک به فضای فیزیکی انتقال می‌یابد.



که  $l$  طول المان است. حال، همانند روش اجزا محدود معمولی، می‌توان تمام ماتریس‌های سختی المانی را در یک ماتریس کلی جاسازی کرد تا دستگاه معادلات سیستم تشکیل شود. سپس با اعمال شرایط مرزی، آن را حل کرد و به جواب‌ها که همان تغییر مکان‌ها و دوران‌ها در درجات آزادی است، دست یافت. برای محاسبه تنش‌ها هم می‌توان از همان روش مرسوم اجزا محدود استفاده کرد.

البته ماتریس بار برای بارهای چند جمله‌ای هم مطابق انتگرال زیر در فضای  $[0,1]$  محاسبه می‌شود که به نوبه خود منجر به محاسبات ضرایب ارتباطی مخصوص به خود می‌شود.

$$R_k^m = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{[0,1]}(\xi) \xi^m \phi(\xi - j) d\xi \quad (49)$$

می‌توان در ساخت المان موجک پایه، از مرتبه‌های مختلفی از موجک‌های خانواده db استفاده کرد. مثل db5، db6 یا db8 و... واضح است که هرچه مرتبه موجک مورد استفاده پایین‌تر باشد، تعداد درجات آزادی المان موردنظر نیز کمتر خواهد بود. به‌طور کلی اگر  $N$ ، مرتبه موجک مورد استفاده باشد ( $N$ ، عددی زوج است و دوبرابر رتبه db می‌باشد) و  $M$ ، تعداد درجات آزادی المان تیر، رابطه آنها از قرار زیر است:

$$M = N - 1 \quad (50)$$

با بالا بردن  $N$ ، تابع مقیاس موردنظر، هموارتر خواهد شد و توانایی تخمین مسایل با دقت بالاتری را داراست، اما هزینه محاسباتی بیشتری را نیز به خود اختصاص خواهد داد. در مسائل عملی، به دلیل تنوع مسائل، با توجه به پیچیدگی مساله و نیاز مورد نظر، مرتبه db مناسب برای مساله انتخاب می‌گردد.

### مثال‌های عددی

در این قسمت به منظور بررسی صحت روابط ذکر شده و قابلیت روش اجزاء محدود موجک- پایه، مثال‌هایی حل شده‌است. برای انجام آنالیز تیر توسط روش اجزاء محدود موجک- پایه، توسط نرم‌افزار *MATLAB*، برنامه‌ای تهیه شده‌است که مثال‌ها با این برنامه حل شده‌اند.

طبق رابطه (۴۰) برای تغییر مکانهای جانبی و دورانها می‌توانیم بنویسیم:

$$w(x) = \sum_{k=-10}^0 \alpha_k \phi(\xi - k) \quad (44)$$

$$\theta(x) = \frac{1}{l} \times \sum_{k=-10}^0 \alpha_k \phi'(\xi - k) \quad (45)$$

که در آن  $\xi = \frac{x}{l}$  خواهد بود.

برای محاسبه درایه های ماتریس  $T$  در همه سطرها بجز سطر دوم و یازدهم از بسط (۴۴) و برای سطر دوم و یازدهم از بسط (۴۵) استفاده می‌کنیم. با توجه به مطالب فوق می‌توان ماتریس  $T$  را که بر قرار کننده رابطه ماتریس  $\delta$  و  $a$  برای db6 است، به صورت زیر به دست آورد:

$$T = \begin{bmatrix} \phi(10) & \phi(9) & \dots & \phi(0) \\ \frac{1}{l}\phi'(10) & \frac{1}{l}\phi'(9) & \dots & \frac{1}{l}\phi'(0) \\ \phi\left(10+\frac{1}{8}\right) & \phi\left(9+\frac{1}{8}\right) & \dots & \phi\left(\frac{1}{8}\right) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi\left(10+\frac{7}{8}\right) & \phi\left(9+\frac{7}{8}\right) & \dots & \phi\left(\frac{7}{8}\right) \\ \phi(11) & \phi(10) & \dots & \phi(1) \\ \frac{1}{l}\phi'(11) & \frac{1}{l}\phi'(10) & \dots & \frac{1}{l}\phi'(1) \end{bmatrix} \quad (46)$$

اگر  $R$ ، معکوس  $T$  باشد، آنگاه ماتریس  $\tilde{k}_e$  در فضای موجک می‌تواند به فضای فیزیکی تبدیل شود و رابطه زیر این تبدیل را نشان می‌دهد:

$$\bar{k}_e = R^T \tilde{k}_e R \quad (47)$$

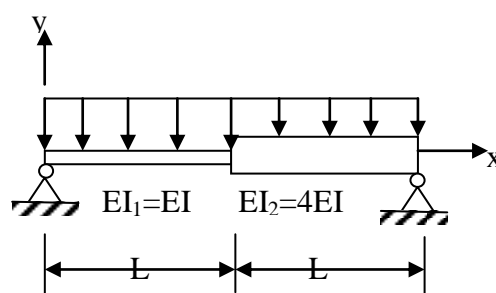
که  $\bar{k}_e$ ، ماتریس سختی المان در فضای فیزیکی می‌باشد. البته  $\bar{k}_e$  در فضای  $[0,1]$  محاسبه شده‌است و با رابطه زیر به ماتریس سختی اصلی المان تبدیل می‌شود:

$$k_e = \frac{1}{l^3} \bar{k}_e \quad (48)$$

## مساله یک: خمش تیر با مقطع متغیر تحت بار یکنواخت

اولین مثال، همانند شکل (۶)، تیری با مقطع غیر مساوی است. دو انتهای تیر دارای تکیه‌گاه ساده می‌باشد. طول تیر برابر  $2L$  است. سختی خمشی قسمت چپ و راست تیر برابر  $EI_0$  و  $4EI_0$  می‌باشد. تیر تحت بار یکنواخت  $q(x)=1$  قرار دارد. این تیر را توسط دو المان db6 تحلیل می‌کنیم. جواب دقیق برای این مساله توسط معادلات دیفرانسیل قابل حل است که بصورت زیر می‌باشد:

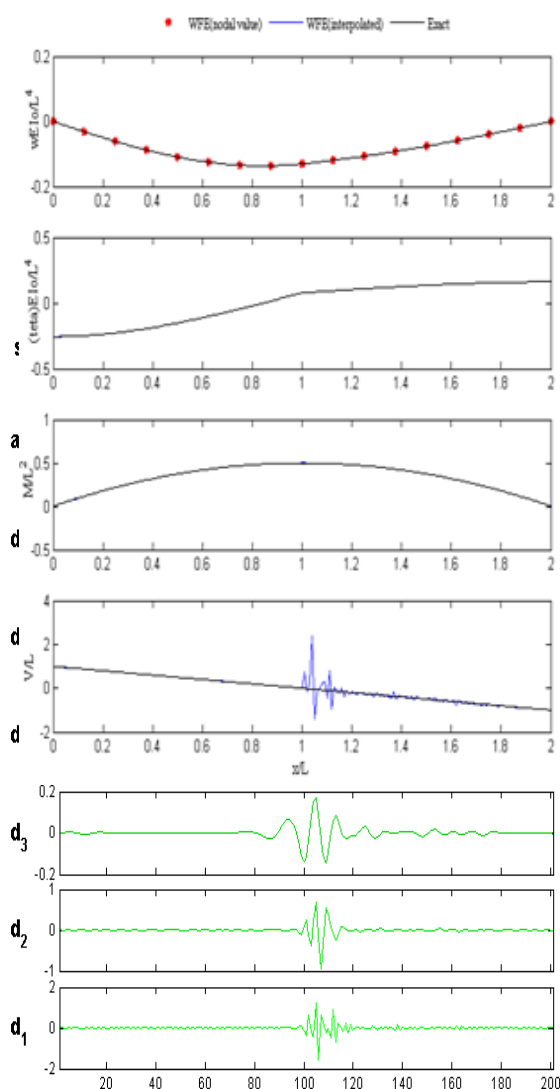
$$\frac{w(x)EI_0}{L^4} = \begin{cases} -\frac{x^4}{24L^4} + \frac{x^3}{6L^3} - 0.2552\frac{x}{L} & 0 \leq x \leq L \\ \frac{1}{4}\left(-\frac{x^4}{24L^4} + \frac{x^3}{6L^3} - 0.0208\frac{x}{L} - 0.6250\right) & L \leq x \leq 2L \end{cases}$$



شکل ۶: شکل مربوط به مساله یکم

برای این مساله با استفاده از db6 مقادیر گرهی تغییر مکان، توسط حل اجزاء محدود موجک- پایه محاسبه شده‌است و با حل دقیق مقایسه شده‌است. خطای rms برای نقاط گرهی در تخمین تغییر مکان نرمالیزه شده  $\frac{wEI_0}{l^4}$ ،  $3.31 \times 10^{-5}$  است! همچنین خطای نسبی نقطه وسط برابر 0.047% می‌باشد. همانطور که مشاهده می‌کنید، جواب از دقت بسیار مطلوبی برخوردار است همچنین نمودار تابع تغییر مکان، دوران، لنگر و برش در طول تیر نیز توسط حل دقیق و WFE در شکل (۷) نشان داده شده‌است. روش WFE حتی قادر به تخمین میزان لنگر و نیروی برشی می‌باشد. چراکه دیپچس مرتبه N تا  $N/2-1$  مرتبه مشتق پذیر است. البته، نمودار تابع برشی دچار مقداری نوفه شده‌است. دلیل آن این است که مشتق مرتبه سوم db6 دارای نوسان زیادی است که این

نوسانات، در جواب اثر گذاشته است. علت اثر گذاری زیاد این نوسانات در این مثال، تغییر ناگهانی مقطع تیر است. این نوفه‌ها به راحتی توسط روش تجزیه تابع به وسیله موجک قابل رفع هستند. روند نوفه زدایی تابع برش توسط db6 و طی شش مرحله، در شکل (۸) نشان داده شده‌است.  $d_1$  تا  $d_6$  بیانگر جزئیات تابع برش و  $a_6$  تقریب این تابع است. قابل ذکر است که  $a_6$  در واقع همان نمودار برش نوفه زدایی شده است.



شکل ۸: نوفه‌زدایی نمودار برش توسط db6 و طی شش مرحله

## مساله دو: خمش تیر تحت بار غیر یکنواخت

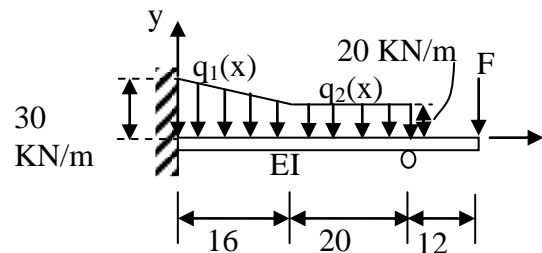
به عنوان دومین مثال، تیر شکل (۹) را در نظر بگیرید. در این تیر  $q_1(x) = (30-10/16x)$  KN/m<sup>2</sup> و  $q_2(x) =$

### بحث و نتیجه گیری

استفاده از توابع مقیاس db به عنوان توابع شکل در این مقاله به طور مبسوط مورد بررسی قرار گرفت. به دلیل انتقال ماتریس سختی از فضای موجک به فضای فیزیکی، تأمین پیوستگی تغییر مکان‌ها و دوران‌ها در مرز بین المانها به خوبی ممکن گشته‌است. توانایی بالای توابع مقیاس db در نمایش توابع، این امکان را به روش اجزاء محدود موجک- پایه می‌دهد که با تعداد المان کم نیز بتواند به دقت بالایی در حل مسائل دست یابد. و در نهایت می‌توان گفت که المان تیر موجک- پایه دارای دقت محاسباتی بسیار بالایی برای تیرهایی با بارگذاری‌های مختلف، تغییر در مقطع و شرایط مرزی متفاوت می‌باشد. مثال‌های عددی ارائه شده شاهد این مدعاست.

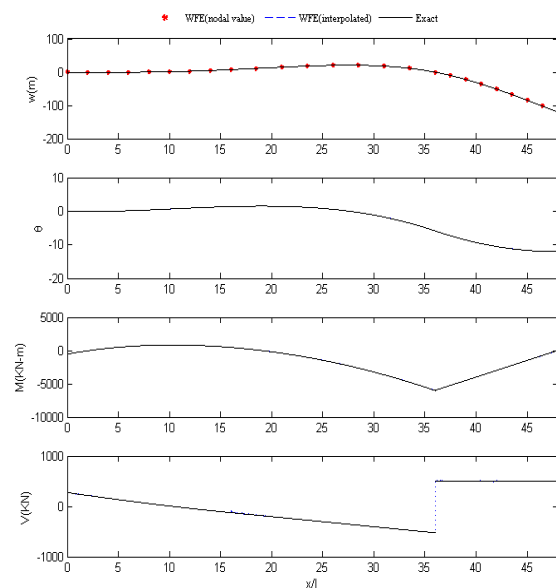
$EI=5800\text{KN.m}^2$  و  $F_0=500\text{KN}$  و  $20\text{ KN/m}^2$

است. هدف تعیین میدان تغییر مکان، دوران، لنگر و نیروی برشی در طول تیر است. حل دقیق در مرجع [۱۷] آورده شده‌است.



شکل ۹: شکل مربوط به مساله دوم

با در نظر گرفتن سه المان db6 برای این مثال، مساله را حل می‌کنیم. نمودار تابع تغییر مکان، دوران، لنگر و برش در طول تیر نیز توسط حل دقیق و WFE در شکل (۱۰) نشان داده شده‌است. همانطور که مشاهده می‌کنید، روش WFE مجدداً جواب بسیار مطلوبی را ارائه می‌کند. در این مثال نیز میزان نوفه برای برش بسیار کم قابل صرف نظر کردن است. خطای rms برای نقاط گرهی در تخمین تغییر مکان، 0.0140 متر است. همچنین خطای نسبی نقطه وسط برابر 0.34% می‌باشد.



شکل ۱۰: تغییر مکان، دوران، لنگر و برش در طول تیر مساله دو توسط حل دقیق و WFE با استفاده از db6

## مراجع

1. Ma, J., Xue, J., Yang, S. and He, Z., (2003) "A study of the construction and application of a Daubechies wavelet- based beam element", *Finite Elements in Analysis and Design*, VOL. 390, PP. 965-975.
2. Xuefeng Chen , Shengjun Yang , Junxing Ma , Zhengjia He, (2004) "The construction of wavelet finite element and its application" *Finite Elements in Analysis and Design*, VOL.40 No.5-6, PP.541-554.
3. Jian-Gang Han , Wei-Xin Ren , Yih Huang, (2005) "A multivariable wavelet-based finite element method and its application to thick plates" *Finite Elements in Analysis and Design*, VOL.41 No.9-10, PP.821-833.
4. Diaz L.A., Martin M.T., Vampa V. (2009) "Daubechies wavelet beam and plate finite elements" *Finite Elements in Analysis and Design*, 45 (3), pp. 200-209.
5. Nguyen H., Stevenson R. (2009) "Finite element wavelets with improved quantitative properties" *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 230 (2), pp. 706-727.
6. Chen X., Xiang J., Li B., He Z. (2010) "A study of multiscale wavelet-based elements for adaptive finite element analysis" *Advances in Engineering Software*, 41 (2), pp. 196-205.
7. Zhang X., Chen X., Wang X., He Z. (2010) "Multivariable finite elements based on B-spline wavelet on the interval for thin plate static and vibration analysis" *Finite Elements in Analysis and Design*, 46 (5), pp. 416-427.
8. Zhong Y., Xiang J., (2011). "Construction of wavelet-based elements for static and stability analysis of elastic problems". *Acta Mechanica Solida Sinica* , 355-364.
9. Daubechis, I. (1992) "Ten lectures on wavelets" CBMS-NSF Series in Applied Mathematics. SIAM, Philadelphia.
10. Lin, W., Kovvali, N., and Carin, L., (2005) "Direct Algorithm for Computation of Derivatives of the Daubechies Basis Functions" *Applied Mathematics and Computation*, VOL. 170, No. 2, PP. 1006-1013.
11. Dahmen, W., and Micchelli, C.A. (1993) "Using the refinement equation for evaluating integrals of wavelets" *SIAM J. Numer. Anal.* 30, PP.507-537.
12. Chen M. Q., Hwang C., and Shih Y. P., (1996) "The computation of wavelet-Galerkin approximation on a bounded interval" *Int. J. Numer. Methods Eng.* 39, PP.2921-44.
13. Monasse, P., Perrier, V., (1998) "Orthonormal Wavelet bases adapted for partial differential equations with boundary conditions" *SIAM J. Math. Anal.* 29, PP.1040-1065.
14. Ko, J., Kurdila, A.J. and Pilant, M.S., (1995) "A class of finite element methods based on orthonormal compactly supported wavelets" *Comput. Mech.* V.16. PP.235-244.
15. Daubechis, I. (1988) "Orthonormal bases of compactly supported wavelets" *Communication in Pure and Applied Mathematics* 41, PP.906-966.
16. Jian-Gang Han, Wei-Xin Ren and Yih Huang (2007) "A Wavelet-Based Stochastic Finite Element Method of Thin Plate Bending" *Applied Mathematical Modelling-An International Journal*. VOL.32, No.2, PP.181-193.
17. Reddy, J.N. (2009) *An Introduction to the Finite Element Method*, third Ed., McGraw-Hill, New York.

## واژه‌های انگلیسی به ترتیب استفاده در متن

1. Hilbert Space فضای هیلبرت فضای متشکل از تمام توابعی است که دارای انرژی کراندار هستند. همه توابع فیزیکی در این فضا هستند.
2. Cascade Algorithm
3. Daubechis
4. Connection coefficient
5. Wavelet Expansion
6. Decomposition
7. Reconstruction
8. Compact Support