

# تغییر مکان قائم دیسک صلب<sup>۱</sup> مدفون در محیط نیمه بینهایت ایزوتروپ جانبی<sup>۲</sup>

امیرعباس کاتبی<sup>۱</sup>، محمد رحیمیان\*<sup>۲</sup>، علی خجسته<sup>۳</sup> و علیرضا صناعتی<sup>۴</sup>

<sup>۱</sup> کارشناس ارشد سازه دانشکده مهندسی عمران پردیس دانشکده‌های فنی دانشگاه تهران

<sup>۲</sup> استاد دانشکده مهندسی عمران پردیس دانشکده‌های فنی دانشگاه تهران

<sup>۳</sup> استادیار گروه علوم پایه مهندسی پردیس دانشکده‌های فنی دانشگاه تهران

<sup>۴</sup> دانشجوی دکتری سازه دانشکده مهندسی عمران پردیس دانشکده‌های فنی دانشگاه تهران

(تاریخ دریافت ۱۳۸۸/۰۴/۰۸، تاریخ دریافت اصلاح شده ۱۳۹۰/۰۸/۱۰، تاریخ تصویب ۱۳۹۰/۰۹/۲۲)

## چکیده

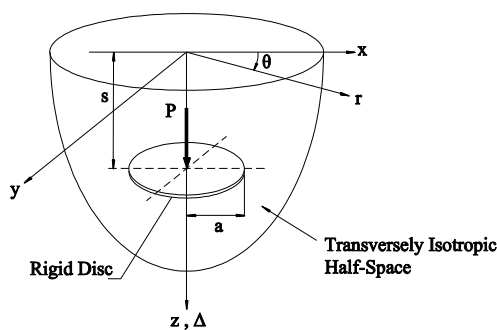
در این مقاله مسئله اندرکنش خاک-سازه برای یک دیسک صلب مدفون متقارن محوری در یک محیط نیمه بینهایت ایزوتروپ جانبی تحت بار قائم مورد بررسی قرار گرفته‌است. معادلات تعادل دینامیکی حاکم بر مسئله در دستگاه مختصات استوانه‌ای  $(r, \theta, z)$  بصورت یک سری معادلات درگیر<sup>۳</sup> می‌باشد. با استفاده از دو تابع پتانسیل<sup>۴</sup> برای مسائل الاستودینامیک<sup>۵</sup> این معادلات بطور کامل مجزا سازی می‌شوند. با استفاده از تبدیل هنکل<sup>۶</sup> در امتداد شعاعی و اعمال شرایط مرزی به معادلات انتگرالی دوگانه<sup>۷</sup> می‌رسیم. برای حل عددی و تحلیلی، معادلات انتگرالی دوگانه به معادله انتگرالی فردهلم نوع دوم تبدیل خواهد شد. در انتها نتایج بصورت گرافیکی ارائه می‌شود. نتایج برای محیط‌های ایزوتروپ با استفاده از نتایج بدست آمده برای محیط‌های ایزوتروپ جانبی استخراج شده و با نتایج موجود برای محیط‌های ایزوتروپ مقایسه می‌گردد.

**واژه‌های کلیدی:** توابع پتانسیل، دیسک صلب مدفون، محیط ایزوتروپ جانبی، تبدیل هنکل، معادلات انتگرالی دوگانه، معادله انتگرالی فردهلم<sup>۸</sup>

## مقدمه

می‌توان Sneddon در سال ۱۹۵۱ [۶]، Keer در سال ۱۹۶۷ [۷]، Spence در سال ۱۹۶۸ [۸]، Selvadurai در سال ۱۹۷۹ [۹] را برشمرد. مسئله دیسک صلب مدفون در حالت کلی در محیط نیمه بینهایت ایزوتروپ با روش‌های عددی توسط Butterfield و Banerjee در سال ۱۹۷۱ [۱۰] حل شده‌است. Pak و Gobert در سال ۱۹۹۰ [۱۱] مسئله دیسک صلب مدفون را تحت بار قائم در محیط ایزوتروپ نیمه بینهایت مورد بررسی قرار دادند. در حال حاضر با توجه به استفاده روز افزون از مواد ناهمسان<sup>۹</sup> نیاز به تحقیقات در این محیط‌ها بیشتر احساس می‌شود. برای مثال مواد کامپوزیت که در سال‌های اخیر در زمینه علوم و مهندسی کاربرد گسترده‌ای یافته‌اند دارای خاصیت ناهمسانی می‌باشند. از سوی دیگر در زمین‌هایی که خاک تحت اثر نیروی ثقل رسوب کرده است و نهشته‌های طبیعی سربار شده روی هم تشکیل داده است خاصیت ناهمسانی وجود دارد. اما با توجه به ملاحظات کاربردی در زمینه مهندسی محیط‌های

اندرکنش دیسک صلب با محیط الاستیک از موضوعات قابل توجه در ریاضیات و مکانیک کاربردی می‌باشد. یک مثال کلاسیک از اندرکنش خاک-سازه در مهندسی عمران، انواع تحلیل‌هایی است که به فهم اساسی از رفتار پی تحت اثر بار خارجی کمک می‌کند. تحلیل این گونه مسائل به کارهای Boussinesq در سال ۱۸۸۵ [۱] که به پاسخ محیط به بار متمرکز در محیط نیمه بینهایت پرداخته است، بر می‌گردد. Sneddon و Harding در سال ۱۹۴۵ [۲] این مسئله را بازنگری کردند و چگونگی استفاده از تبدیلات انتگرالی را برای اینگونه مسائل نشان دادند. سپس Collins در سال ۱۹۶۲ [۳] و Keer در سال ۱۹۶۵ [۴] اندرکنش دیسک نازک صلب در یک محیط ایزوتروپ جامد نامحدود تحت جابجایی اولیه را بررسی کردند. Sih و Kassir در سال ۱۹۶۸ [۵] مسئله مشابهی را برای دیسک بیضی حل کردند. همچنین مسائل متعدد دیگری مرتبط با دیسک صلب در محیط نیمه بینهایت مورد تحقیق واقع شده‌است که از آن جمله



شکل ۱: دیسک صلب در محیط نیمه بینهایت ایزوتروپ جانبی

### تشکیل معادلات انتگرالی دوگانه

معادلات تعادل بر حسب مؤلفه‌های بردار تغییرمکان در غیاب نیروهای حجمی و در حالت متقارن محوری به صورت زیر بیان می‌شود [۱۲].

$$\begin{aligned}
 & c_{11} \left( \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} \right) + c_{44} \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \\
 & + (c_{13} + c_{44}) \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z} = 0 \\
 & c_{44} \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + c_{33} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \\
 & + (c_{13} + c_{44}) \left( \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) = 0
 \end{aligned} \quad (9)$$

که در آن  $u_z$  و  $u_r$  مؤلفه‌های بردار تغییرمکان به ترتیب در امتدادهای  $r$  و  $z$  می‌باشند و  $c_{ij}$  ( $i, j = r, z$ ) ثابت‌های ارتجاعی می‌باشند.

اگر  $E$  معرف مدول یانگ در صفحه ایزوتروپی،  $E'$  معرف مدول یانگ عمود بر صفحه ایزوتروپی،  $\nu$  معرف ضریب پواسون در صفحه ایزوتروپی (جمع شدگی در صفحه ایزوتروپی به علت کشش در همین صفحه)،  $\nu'$  معرف ضریب پواسون عمود بر صفحه ایزوتروپی (جمع شدگی عمود بر صفحه ایزوتروپی به علت کشش در این صفحه)،  $G$  معرف مدول برشی در صفحه ایزوتروپی و  $G'$  معرف مدول برشی در صفحات عمود بر صفحه ایزوتروپی باشد در این صورت خواهیم داشت [۱۳].

ناهمسان معمولاً بصورت ایزوتروپ جانبی و در برخی حالات بصورت ارتوتروپ<sup>۱۱</sup> مدل می‌شوند.

در این مقاله یک فرمول‌بندی تحلیلی برای مسئله دیسک صلب مدفون در یک محیط نیمه بینهایت ایزوتروپ جانبی تحت بار متقارن قائم ارائه شده‌است. بوسیله روش پتانسیل و آزاد سازی شرایط مرزی، شرایط مرزی اولیه مسئله با کمک تبدیل هنکل به صورت معادله انتگرالی دوگانه فرمول‌بندی می‌شود. در این مقاله، دیسک به صورت دایره‌ای به شعاع  $a$  به صورت مدفون در عمق  $s$  در یک محیط نیمه بینهایت الاستیک خطی ایزوتروپ جانبی می‌باشد (شکل ۱). فرض می‌شود دیسک در معرض یک سیستم نیرویی قرار گرفته‌است که منجر به تغییر مکان قائم  $\Delta$  در جهت  $z$  می‌شود. با توجه به تقارن محوری، مسئله به صورت طبیعی با مختصات استوانه‌ای  $(r, \theta, z)$  که  $z$  محور تقارن آن می‌باشد، مطابق است. شرایط مرزی مسئله به صورت زیر بیان می‌شود:

$$u_z(r, s) = \Delta, \quad r < a \quad (1)$$

$$u_z(r, s^+) = u_z(r, s^-), \quad r \in [0, +\infty) \quad (2)$$

$$u_r(r, s^+) = u_r(r, s^-), \quad r \in [0, +\infty) \quad (3)$$

$$u_\theta(r, s^+) = 0, \quad r, z \in [0, +\infty) \quad (4)$$

$$\sigma_{zz}(r, 0) = \sigma_{rz}(r, 0) = 0, \quad r \in [0, +\infty) \quad (5)$$

$$\sigma_{rz}(r, s^+) = \sigma_{rz}(r, s^-), \quad r \in [0, +\infty) \quad (6)$$

$$\sigma_{zz}(r, s^+) - \sigma_{zz}(r, s^-) = -R(r), \quad r < a \quad (7)$$

$$\sigma_{zz}(r, s^+) = \sigma_{zz}(r, s^-), \quad r > a \quad (8)$$

در اینجا،  $R(r)$  توزیع تنش تماسی<sup>۱۱</sup> نامشخص وارد بر دیسک می‌باشد. با توجه به خاصیت محیط نیمه بینهایت خواهیم داشت:

$$\sigma \rightarrow 0 \quad \text{as} \quad \sqrt{r^2 + z^2} \rightarrow \infty$$

که در آن

$$\nabla_i^2 = \nabla_r^2 + \frac{1}{s_i^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad i=1,2 \quad (15)$$

پارامترهای  $s_1^2$  و  $s_2^2$  ریشه‌های معادله زیر هستند.

$$c_{33}c_{44}s^4 + (c_{13}^2 + 2c_{13}c_{44} - c_{11}c_{33})s^2 + c_{11}c_{44} = 0 \quad (16)$$

نشان داده شده‌است که  $s_2$  و  $s_1$  می‌توانند اعداد مختلط باشند اما نمی‌توانند اعداد موهومی خالص باشند [۱۲]. با توجه به هندسه و شرایط مرزی مسئله بسیار مناسب می‌باشد که از تبدیل هنکل مرتبه  $m$  ام نسبت به امتداد شعاعی  $r$  به شرح زیر استفاده شود [۱۵].

$$\tilde{f}^m(\xi, z) = \int_0^\infty f(r, z) r J_m(r\xi) dr \quad (17)$$

که تبدیل معکوس<sup>۱۲</sup> هنکل آن عبارتست از:

$$f(r, z) = \int_0^\infty \tilde{f}^m(\xi, z) \xi J_m(r\xi) d\xi \quad (18)$$

که در آن  $J_m$  تابع بسل<sup>۱۳</sup> نوع اول از مرتبه  $m$  می‌باشد. مطابق با کاربرد تئوری هنکل مرتبه صفر، معادله دیفرانسیل معمولی حاکم بر  $F$  (۱۴) به صورت زیر بدست می‌آید:

$$(\tilde{\nabla}_{10}^2 \tilde{\nabla}_{20}^2) \tilde{F}^0(z) = 0 \quad (19)$$

که در آن

$$\tilde{\nabla}_{i0}^2 = -\xi^2 + \frac{1}{s_i^2} \frac{d^2}{dz^2}, \quad i=1,2 \quad (20)$$

با استفاده از رابطه (۱۲) و با کمک تعریف هنکل معکوس، تغییر مکان‌ها در فضای تبدیل یافته<sup>۱۴</sup> بر حسب تابع پتانسیل  $F$  به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_z^0 &= \left[ \alpha_2 \frac{d^2}{dz^2} - \xi^2 (1 + \alpha_1) \right] \tilde{F}^0 \\ \tilde{u}_r^1 &= \alpha_3 \xi \frac{d\tilde{F}^0}{dz} \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} c_{11} &= \frac{E(1 - \frac{E}{E'} v'^2)}{(1+v)(1-v - 2\frac{E}{E'} v'^2)}, \\ c_{13} &= \frac{Ev'}{1-v - 2\frac{E}{E'} v'^2}, c_{33} = \frac{E'(1-v)}{1-v - 2\frac{E}{E'} v'^2} \\ c_{44} &= G', c_{66} = \frac{E}{2(1+v)} = G, c_{66} = \frac{c_{11} - c_{12}}{2} \end{aligned} \quad (10)$$

برای مصالح ایزوتروپ رابطه (۱۰) به فرم زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned} c_{11} = c_{33} &= \frac{E(1-v)}{(1+v)(1-2v)} \\ c_{12} = c_{13} &= \frac{Ev}{(1+v)(1-2v)} \\ c_{44} = c_{66} &= \frac{E}{2(1+v)} \end{aligned} \quad (11)$$

معادلات تعادل (۹) یک دستگاه معادلات دیفرانسیل درگیر با مشتقات جزئی می‌باشند. به منظور مجزا سازی این معادلات از تابع پتانسیل  $F$  استفاده شده‌است. مؤلفه‌های بردار تغییر مکان بر حسب تابع پتانسیل  $F$  در دستگاه مختصات استوانه‌ای به صورت زیر نوشته می‌شوند [۱۴].

$$\begin{aligned} u_r(r, z) &= -\alpha_3 \frac{\partial^2 F(r, z)}{\partial r \partial z} \\ u_z(r, z) &= \left[ (1 + \alpha_1) \nabla_r^2 + \alpha_2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] F(r, z) \end{aligned} \quad (12)$$

که در آن

$$\begin{aligned} \nabla_r^2 &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \\ \alpha_1 &= \frac{c_{12} + c_{66}}{c_{66}}, \alpha_2 = \frac{c_{44}}{c_{66}}, \alpha_3 = \frac{c_{13} + c_{44}}{c_{66}} \end{aligned} \quad (13)$$

با قرار دادن روابط (۱۲) در معادلات تعادل (۹)، معادله دیفرانسیل حاکم بر تابع پتانسیل  $F$  بصورت زیر در می‌آید:

$$(\nabla_1^2 \nabla_2^2) F = 0 \quad (14)$$

$$Z_0(\xi) = \tilde{R}_0(\xi) \tag{۲۶}$$

$$\Omega_2(\xi, z; s) = \frac{1}{2c_{33}(s_1^2 - s_2^2)\xi} \{ \nu_2 s_1 e^{-s_1 \xi |z-s|} - \nu_1 s_2 e^{-s_2 \xi |z-s|} - \frac{s_1 + s_2}{s_1 - s_2} (\nu_2 s_1 e^{-s_1 \xi (z+s)} + \nu_1 s_2 e^{-s_2 \xi (z+s)}) + \frac{2s_1 s_2}{s_1 - s_2} \left( \frac{\eta_1}{\eta_2} \nu_2 e^{-\xi(s_1 z + s_2 s)} + \frac{\eta_2}{\eta_1} \nu_1 e^{-\xi(s_2 z + s_1 s)} \right) \} \tag{۲۷}$$

در اینجا

$$\eta_i = c_{13} + c_{33} s_i^2, \quad \nu_i = c_{44} - c_{33} s_i^2, \tag{۲۸}$$

اگر  $c_{11}$  تا  $c_{66}$  برای مصالح ایزوتروپ از رابطه (۱۱) جایگزین شوند، در این صورت رابطه (۲۸) به شرح زیر در می‌آید:

$$\Omega_2(\xi, z; s) = \frac{1}{8(1-\nu)\xi} \{ e^{-\xi|z-s|} (3-4\nu + \xi|z-s|) + e^{-\xi(z+s)} [5-12\nu+8\nu^2 + (3-4\nu)\xi(z+s) + 2zs\xi^2] \} \tag{۲۹}$$

Pak و Gobert در سال ۱۹۹۰ برای محیط نیمه‌بی‌نهایت با رفتار ایزوتروپ، رابطه فوق را در مرجع شماره [۱۱] بیان کرده‌اند. از لحاظ تحلیلی نتایج حاضر در این مقاله کاملاً با نتایج ارائه شده توسط Pak و Gobert در سال ۱۹۹۰ برای مصالح ایزوتروپ مطابقت دارد. با کمک روابط (۲۵) و (۲۶)، دو شرط مرزی باقیمانده (۱) و (۸) منجر به تشکیل معادلات انتگرالی زیر خواهد شد:

$$\int_0^\infty \Omega_2(\xi, s; s) \frac{\xi Z_0(\xi)}{c_{44}} J_0(r\xi) d\xi = \Delta, \quad r < a \tag{۳۰}$$

و

$$\int_0^\infty Z_0(\xi) \xi J_0(r\xi) d\xi = 0, \quad r > a \tag{۳۱}$$

که در رابطه (۳۰):

همچنین تنش‌ها در فضای تبدیل یافته بر حسب تابع پتانسیل  $F$  به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{zz}^0 &= \frac{d}{dz} [\alpha_3 c_{13} \xi^2 - c_{33} \xi^2 (1 + \alpha_1) + c_{33} \alpha_2 \frac{d^2}{dz^2}] \tilde{F}^0 \\ \tilde{\sigma}_{rr}^0 + 2c_{66} \left( \frac{\tilde{u}_r}{r} \right)^0 &= \frac{d}{dz} [\alpha_3 c_{11} \xi^2 - c_{13} \xi^2 (1 + \alpha_1) + c_{13} \alpha_2 \frac{d^2}{dz^2}] \tilde{F}^0 \\ \tilde{\sigma}_{\theta\theta}^0 - 2c_{66} \left( \frac{\tilde{u}_r}{r} \right)^0 &= \frac{d}{dz} [\alpha_3 c_{12} \xi^2 - c_{13} \xi^2 (1 + \alpha_1) + c_{13} \alpha_2 \frac{d^2}{dz^2}] \tilde{F}^0 \\ \tilde{\sigma}_{rz}^1 &= c_{44} \xi \left[ (\alpha_3 - \alpha_2) \frac{d^2}{dz^2} + \xi^2 (1 + \alpha_1) \right] \tilde{F}^0 \\ \tilde{\sigma}_{r0} &= \tilde{\sigma}_{z0} = 0 \end{aligned} \tag{۲۲}$$

با توجه به شکل شماره (۱)، محیط نیم بینهایت از دو ناحیه در پایین و بالای دیسک صلب با مصالح مشابه تشکیل شده‌است (ناحیه I  $\{0 < z < s\}$  و ناحیه II  $\{z > s\}$ ). با توجه به دو ناحیه I و II، حل کلی معادله (۱۷) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\tilde{F}^0(\xi, z) = A^I(\xi) e^{-s_1 \xi z} B^I(\xi) e^{-s_2 \xi z} + C^I(\xi) e^{-s_1 \xi z} + D^I(\xi) e^{-s_2 \xi z}, \quad z < s \tag{۲۳}$$

$$\tilde{F}^0(\xi, z) = A^{II}(\xi) e^{-s_1 \xi z} + B^{II}(\xi) e^{-s_2 \xi z}, \quad z > s \tag{۲۴}$$

ثابت‌های  $A^I, \dots, B^I$  در معادلات فوق تابعی مجهول می‌باشند که با نوشتن شرایط مرزی (۲) تا (۷) بر حسب  $\tilde{R}^0(\xi)$  بدست می‌آیند. بر پایه نتایج فوق و اعمال شرایط مرزی تغییرمکان قائم به صورت انتگرالی زیر بدست می‌آید:

$$u_z(r, z) = \int_0^\infty \Omega_2(\xi, z; s) \frac{\xi Z_0(\xi)}{c_{44}} J_0(r\xi) d\xi \tag{۲۵}$$

که در آن

$$\delta_s = \frac{2c_{33}(s_1 + s_2)\Delta}{c_{44} + c_{33}s_1s_2}, \alpha = -1, \gamma = 0 \quad (39)$$

مطابق با Noble (۱۹۶۳) [۱۵]، روابط (۳۵) و (۳۶) با کمک انتگرال Sonine در حالتی که  $-2 < \alpha < 0$  می‌باشد، به فرم زیر نوشته می‌شود:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\xi}} [1 + H_s(\xi)] B(\xi) J_{\frac{1}{2}}(r\xi) d\xi = \frac{r^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{1}{2})} \delta_s, \quad r < a \quad (40)$$

و

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\xi}} B(\xi) J_{\frac{1}{2}}(r\xi) d\xi = 0, \quad r > a \quad (41)$$

در (۴۰)،  $\Gamma(x)$  تابع گاما می‌باشد. برای حل عددی معادلات انتگرالی دوگانه فوق، Noble (۱۹۶۳) [۱۵] آنها را به معادله انتگرالی فردهم دوم تبدیل می‌کند. بدین منظور مناسب است تابع  $\theta$  به فرم زیر تعریف شود:

$$B(\xi) = \frac{\xi^{\frac{3}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^a \rho^{\frac{1}{2}} \theta(\rho) J_{\frac{1}{2}}(\rho\xi) d\rho, \quad \xi \in [0, \infty) \quad (42)$$

که معکوس آن به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\theta(r) = \frac{r^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{1}{2})}{2^{\frac{1}{2}}} \int_0^{\infty} \xi^{-\frac{1}{2}} B(\xi) J_{\frac{1}{2}}(r\xi) d\xi, \quad r < a \quad (43)$$

$$\theta(r) = 0, \quad r > a \quad (44)$$

معادلات انتگرالی (۴۰) و (۴۱) به کمک روابط (۴۲) و (۴۳) به معادله انتگرالی فردهم نوع دوم زیر تبدیل می‌شود:

$$\theta(r) + \frac{1}{\pi} \int_0^a K_s(r, \rho) \theta(\rho) d\rho = \delta_s \quad (45)$$

که در آن

$$\Omega_2(\xi, s; s) = \frac{1}{2c_{33}(s_1^2 - s_2^2)\xi} \{v_2s_1 - v_1s_2 - \frac{s_1 + s_2}{s_1 - s_2} (v_2s_1e^{-2s_1\xi s} + v_1s_2e^{-2s_2\xi s}) + \frac{2s_1s_2}{s_1 - s_2} \left( \frac{\eta_1}{\eta_2} v_2 + \frac{\eta_2}{\eta_1} v_1 \right) e^{-\xi(s_1+s_2)s} \} \quad (32)$$

که دارای خاصیت زیر می‌باشد:

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \xi \Omega_2(\xi, s; s) = \frac{c_{44}}{2c_{33}(s_1 + s_2)} \left[ 1 + \frac{(1 + \alpha_1)}{\alpha_2 s_1 s_2} \right] \quad (33)$$

با قرار دادن  $s = 0$  در (۳۱) داریم:

$$\Omega_2(\xi, 0; 0) = \frac{\sqrt{c_{11}c_{33}}(c_{13} + c_{44})(s_1 + s_2)}{\xi(c_{13} + c_{33}s_1^2)(c_{13} + c_{33}s_2^2)} \quad (34)$$

### تبدیل معادلات انتگرالی دوگانه به معادله انتگرالی فردهم

برای حل معادلات انتگرالی دوگانه (۳۰) و (۳۱) برای مسائل مدفون، آن‌ها را به فرم کلی زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\int_0^{\infty} \xi^{\alpha} \{1 + H(\xi)\} B(\xi) J_{\gamma}(r\xi) d\xi = \delta_s, \quad r < a \quad (35)$$

و

$$\int_0^{\infty} B(\xi) J_{\gamma}(r\xi) d\xi = 0, \quad r > a \quad (36)$$

که در آن

$$B(\xi) = \frac{\xi Z_0(\xi)}{c_{44}} \quad (37)$$

$$H_s(\xi) = \frac{1}{(s_1 - s_2)(c_{44} + c_{33}s_1s_2)} \left\{ \frac{2s_1s_2}{s_1 - s_2} \left( \frac{\eta_1}{\eta_2} v_2 + \frac{\eta_2}{\eta_1} v_1 \right) e^{-\xi(s_1+s_2)s} - \frac{s_1 + s_2}{s_1 - s_2} (v_2s_1e^{-2s_1\xi s} + v_1s_2e^{-2s_2\xi s}) \right\} \quad (38)$$

که در آن  $\delta(x)$  تابع دلتای دیراک می‌باشد. برای حالت  $s=0$ ، حل معادلات انتگرالی دوگانه بسیار ساده تر می‌شود. در حقیقت با تبدیلی مشابه (۴۲)، از حل معادلات (۳۰) و (۳۱) خواهیم داشت:

$$\theta_0(r) = \frac{c_{11}c_{33} - c_{13}^2}{c_{44}\sqrt{c_{11}c_{33}}} \frac{\Delta}{s_1 + s_2} \quad (50)$$

### حل معادله انتگرالی فردهلم

قبل از حل مسئله در حالت کلی، ابتدا چند حالت خاص که به صورت تحلیلی قابل حل می‌باشد، مورد بررسی قرار داده می‌شود:

حالت ۱: محیط بینهایت  $s \rightarrow \infty$   
در حالت محیط بینهایت<sup>۱۶</sup>، هسته انتگرالی (۴۷) مساوی با صفر می‌شود و معادله (۴۵) به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\theta_\infty(r) = \frac{2c_{33}(s_1 + s_2)}{c_{44} + \sqrt{c_{11}c_{33}}} \Delta \quad (51)$$

حالت ۲: دیسک بروی سطح<sup>۱۷</sup>  $s \rightarrow 0$   
همانطور که در قسمت قبل بدست آمد، در حالت  $s=0$  (دیسک بروی سطح) خواهیم داشت:

$$\theta_0(r) = \frac{c_{11}c_{33} - c_{13}^2}{c_{44}\sqrt{c_{11}c_{33}}} \frac{\Delta}{s_1 + s_2} \quad (52)$$

یک جواب ویژه با میل دادن  $s \rightarrow 0$  در مسئله محیط مدفون بدست می‌آید. با استفاده از (۴۹) هسته انتگرالی (۴۷) به فرم زیر در خواهد آمد:

$$k_{0+}(x) = \frac{(s_1 + s_2)}{(c_{44} + c_{33}s_1s_2)(s_1 - s_2)^2} \times \left\{ 2\left(\frac{\eta_1}{\eta_2}v_2 + \frac{\eta_2}{\eta_1}v_1\right) \frac{s_1s_2}{s_1 + s_2} - v_2s_1 - v_1s_2 \right\} \delta(x) \quad (53)$$

و با جایگذاری معادله فوق در (۴۵) رابطه دو ضابطه‌ای زیر بدست می‌آید:

$$\theta_{0+}(r) = \frac{c_{11}c_{33} - c_{13}^2}{c_{44}\sqrt{c_{11}c_{33}}} \frac{\Delta}{s_1 + s_2}, \quad 0 \leq r < a \quad (54)$$

$$\theta_{0+}(r) = \frac{2\Delta}{\frac{\sqrt{c_{11}c_{33}} + c_{44}}{2c_{33}(s_1 + s_2)} - \frac{\sqrt{c_{11}c_{33}c_{44}}(s_1 + s_2)}{c_{11}c_{33} - c_{13}^2}}, \quad r \rightarrow 0 \quad (55)$$

$$K_s(r, \rho) = \pi(r\rho)^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty \xi H_s(\xi) J_{-\frac{1}{2}}(r\xi) J_{-\frac{1}{2}}(\rho\xi) d\xi \quad (46)$$

شرط اعتبار آنالیز فوق، همگرایی انتگرال مربوط به  $K_s(r, \rho)$  یعنی هسته معادله انتگرالی است. شرایط لازم برای  $H(\xi)$  عبارتند از [۱۵]:

الف) در صورتی که  $\xi$  به سمت صفر میل کند، رفتار  $H(\xi)$  باید همانند  $\xi^2$  باشد، به طوریکه  $\lambda > -(2\gamma + \alpha + 2)$  است. تمامی جملات رابطه (۳۸) دارای ترم  $e^{-\xi}$  می‌باشد. بسط مک لورن تابع  $e^{-\xi}$  از یک تابع چند جمله‌ای با توان‌های  $0, 1, 2, \dots$  تشکیل شده‌است، بنابراین  $H(\xi)$  شرط السف را به صورت  $\lambda = 0, 1, 2, \dots > -(2 \times 0 + (-1) + 2) = -1$  ارضا می‌نماید.

ب) وقتی که  $\xi$  به سمت بینهایت میل می‌کند،  $H(\xi)$  باید به سمت صفر برود. با توجه به وجود ترم  $e^{-\xi}$  در رابطه (۳۸)، زمانیکه  $\xi$  به سمت بینهایت میل کند،  $H(\xi)$  به سمت صفر میل می‌نماید.  
برای مسئله ارائه شده در این مقاله، هسته انتگرالی<sup>۱۵</sup> (۴۶) به صورت تحلیلی در زیر بدست آمده‌است:

$$K_s(r, \rho) = k(r - \rho) + k(r + \rho) \quad (47)$$

که در آن

$$k(x) = \frac{2(s_1 + s_2)}{\pi(c_{44} + c_{33}s_1s_2)(s_1 - s_2)^2} \times \left\{ s_1s_2 \left( \frac{\eta_1}{\eta_2}v_2 + \frac{\eta_2}{\eta_1}v_1 \right) \frac{s}{(s_1 + s_2)^2 s^2 + x^2} - \left[ v_2s_1^2 \frac{s}{4s_1^2 s^2 + x^2} + v_1s_2^2 \frac{s}{4s_2^2 s^2 + x^2} \right] \right\} \quad (48)$$

برای کاربردهای آینده، لازم به ذکر است که هنگامی که  $s \rightarrow 0^+$  داریم:

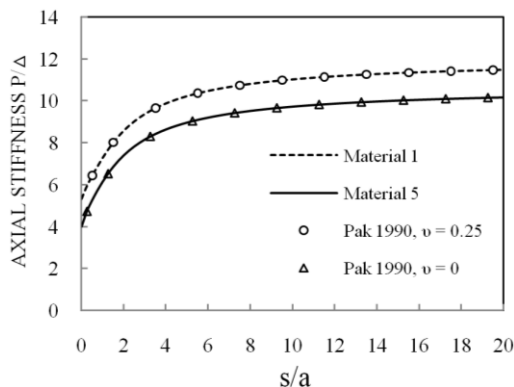
$$\frac{2(s_1s)}{(2s_1s)^2 + x^2} \rightarrow \pi\delta(x), \quad \frac{2(s_2s)}{(2s_2s)^2 + x^2} \rightarrow \pi\delta(x),$$

$$\frac{(s_1 + s_2)}{[(s_1 + s_2)s]^2 + x^2} \rightarrow \pi\delta(x) \quad (49)$$

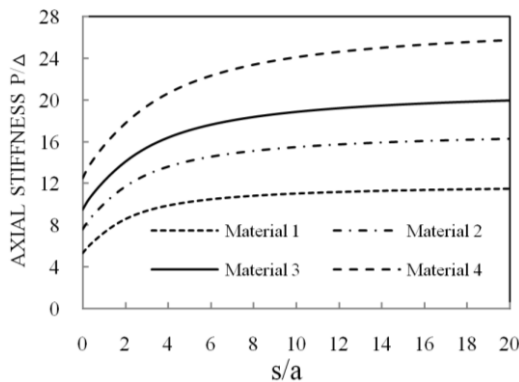
و در حالت  $s=0$  بصورت معادله:

$$\frac{P}{c_{44}a\Delta} = \frac{c_{11}c_{33} - c_{13}^2}{c_{44} + \sqrt{c_{11}c_{33}}} \frac{4}{s_1 + s_2} \quad (61)$$

در می‌آید. رابطه تغییرمکان- بار بر حسب تابعی از  $s$  در اشکال (۳) و (۴) نشان داده شده‌است. شکل (۴) سختی محوری برای محیط‌های مختلف با رفتار ایزوتروپ جانبی را نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود با افزایش  $E'$ ، سختی محوری نیز افزایش می‌یابد.



شکل ۳: مقایسه سختی محوری ماده ایزوتروپ با مقاله Pak و Gobert (۱۹۹۰)



شکل ۴: مقایسه سختی محوری برای محیط‌های ایزوتروپ جانبی با مصالح مختلف

در این مقاله برای حل مسئله در عمق محدود و در محیط نیمه بینهایت، از روش ذوزنقه برای برآورد عددی معادله انتگرالی فردهلم استفاده شده‌است. به منظور ارائه نتایج عددی، ۳ نوع مصالح مختلف با رفتار ایزوتروپ جانبی به همراه ۲ نوع مصالح ایزوتروپ در نظر گرفته شده‌است. جدول (۱) خصوصیات مکانیکی را برای این مواد ارائه می‌کند. به منظور ارزیابی میزان دقت نتایج عددی حاصل از این مقاله در هر مرحله مقایسه‌هایی با نتایج موجود برای مصالح ایزوتروپ ارائه شده توسط Pak و Gobert در سال ۱۹۹۰ [۱۱] انجام گرفته‌است. تطابق خوب جواب‌ها معرف صحت نتایج بدست آمده در این مقاله می‌باشد.

همان‌طور که در معادله (۵۲) نشان داده شد، در حالتی که  $s \rightarrow 0$  مسئله در لبه دیسک یک جهش ناگهانی دارد. اثر این جهش در قسمت‌های بعد بررسی خواهد شد.

## ۱۸ سختی محوری

نیروی لازم برای تحمل جابجایی قائم دیسک توسط معادله (۵۶) بدست می‌آید:

$$P = \int_0^a R(r) 2\pi r dr \quad (56)$$

با کمک معادله (۴۲) و تعریف زیر:

$$\int_0^\infty \xi^{\frac{1}{2}} J_{-\frac{1}{2}}(\rho\xi) J_{-1}(r\xi) d\xi = \frac{(\rho^2 - r^2)^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}} \Gamma(\frac{1}{2}) \rho^{-\frac{1}{2r}}}, \quad \rho > r \quad (57)$$

$$\int_0^\infty \xi^{\frac{1}{2}} J_{-\frac{1}{2}}(\rho\xi) J_{-1}(r\xi) d\xi = 0, \quad \rho < r \quad (58)$$

معادله (۵۶) به معادله زیر تبدیل می‌شود:

$$P = 4c_{44}a \int_0^a \theta(\rho) d\rho \quad (59)$$

که در صورت حل معادله فردهلم به صورت مستقیم بدست می‌آید:

در حالت  $s \rightarrow \infty$ ، معادله (۵۹) به معادله زیر:

$$\frac{P}{c_{44}a\Delta} = \frac{8c_{33}(s_1 + s_2)}{c_{44} + \sqrt{c_{11}c_{33}}} \quad (60)$$

جدول ۱: خصوصیات مکانیکی مصالح مختلف

| مصالح            | $E (\times 10^4 \text{ N/mm}^2)$ | $E' (\times 10^4 \text{ N/mm}^2)$ | $G (\times 10^4 \text{ N/mm}^2)$ | $G' (\times 10^4 \text{ N/mm}^2)$ | $\nu$ | $\nu'$ | $c_{11} (\times 10^4 \text{ N/mm}^2)$ | $c_{33} (\times 10^4 \text{ N/mm}^2)$ | $c_{44} (\times 10^4 \text{ N/mm}^2)$ | $c_{13} (\times 10^4 \text{ N/mm}^2)$ | $c_{12} (\times 10^4 \text{ N/mm}^2)$ |
|------------------|----------------------------------|-----------------------------------|----------------------------------|-----------------------------------|-------|--------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| ۱<br>(Isotropic) | ۵                                | ۵                                 | ۲                                | ۲                                 | ۰/۲۵  | ۰/۲۵   | ۶                                     | ۶                                     | ۲                                     | ۲                                     | ۲                                     |
| ۲                | ۵                                | ۱۰                                | ۲                                | ۲                                 | ۰/۲۵  | ۰/۲۵   | ۵/۶                                   | ۱۰/۹                                  | ۲                                     | ۱/۸                                   | ۱/۶                                   |
| ۳                | ۵                                | ۱۵                                | ۲                                | ۲                                 | ۰/۲۵  | ۰/۲۵   | ۵/۵                                   | ۱۵/۹                                  | ۲                                     | ۱/۸                                   | ۱/۵                                   |
| ۴                | ۵                                | ۲۵                                | ۲                                | ۲                                 | ۰/۲۵  | ۰/۲۵   | ۵/۴                                   | ۲۵/۹                                  | ۲                                     | ۱/۷                                   | ۱/۴                                   |
| ۵<br>(Isotropic) | ۵                                | ۵                                 | ۲/۵                              | ۲/۵                               | ۰     | ۰      | ۵                                     | ۵                                     | ۲/۵                                   | ۰                                     | ۰                                     |

پاسخ محیط به دیسک صلب مدفون

با توجه به رابطه (۲۵)، تغییر مکان قائم به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\gamma_3(\xi, z; s) = \frac{1}{8(1-\nu)\xi} \{-\xi(z-s)e^{-\xi|z-s|} + [4(1-2\nu)(1-\nu) - (3-4\nu)(z-s)\xi - 2zs\xi^2]e^{-\xi(z+s)}\} \quad (۶۶)$$

$$u_z(r, z) = \int_0^\infty \xi \Omega_2(\xi, z; s) \frac{\tilde{R}^0(\xi)}{c_{44}} J_0(r\xi) d\xi \quad (۶۲)$$

Gobert و Pak در سال ۱۹۹۰ برای محیط نیمه بینهایت با رفتار ایزوتروپ رابطه (۶۶) را برای بارگذاری در عمق  $z = s$  در مرجع شماره [۱۱] بیان کرده‌اند. با بکارگیری (۲۶)، (۳۸)، (۴۲) و با در نظر گرفتن اینکه:

به صورت مشابه، با استفاده از (۲۱) و (۲۲)، تغییرمکان شعاعی به شرح زیر به دست می‌آید:

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos(x) \quad (۶۷)$$

$$u_z(r, z) = \int_0^\infty -\xi \gamma_3(\xi, z; s) \frac{\tilde{R}^0(\xi)}{c_{44}} J_1(r\xi) d\xi \quad (۶۳)$$

توزیع نیروی تماس در فضای تبدیل یافته به شرح زیر است:

که در آن

$$\tilde{R}^0(\xi) = \frac{c_{44} B(\xi)}{\xi} = \frac{2c_{44}}{\pi} \int_0^\pi \theta(\rho) \cos(\xi\rho) d\rho \quad (۶۸)$$

$$\gamma_3 = \frac{(c_{13} + c_{44})}{2c_{33}\xi(s_1^2 - s_2^2)} \left\{ \text{sgn}(z-s) \left( e^{-s_1\xi|z-s|} - e^{-s_2\xi|z-s|} \right) - \frac{s_1 + s_2}{s_1 - s_2} \left( e^{-\xi s_1(z+s)} + e^{-\xi s_2(z+s)} \right) + \frac{2}{(s_1 - s_2)} \left( \frac{\eta_1}{\eta_2} s_2 e^{-\xi(s_1 z + s_2 s)} + \frac{\eta_2}{\eta_1} s_1 e^{-\xi(s_2 z + s_1 s)} \right) \right\} \quad (۶۴)$$

با قرار دادن (۶۸) در (۶۲) و (۶۳)، تغییرمکان‌ها به صورت مستقیم بر حسب  $\theta$  محاسبه می‌شود. برای حالت  $s \rightarrow \infty$  تغییرمکان‌ها به صورت تحلیلی در زیر ارائه شده‌است:

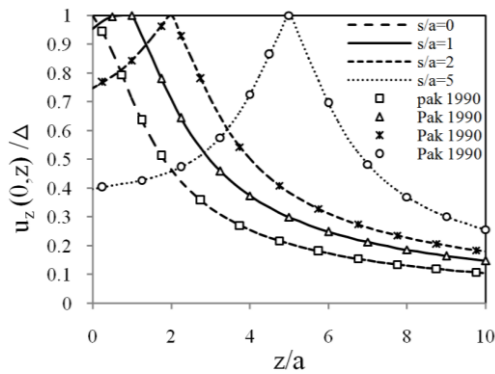
که در آن

$$u_{z\infty}(r, z) = \frac{2\Delta}{\pi(c_{44} + \sqrt{c_{11}c_{33}})(s_1 - s_2)} \times \left\{ \nu_2 s_1 \sin^{-1} \left( \frac{2a}{f_1^I + f_1^{II}} \right) - \nu_1 s_2 \sin^{-1} \left( \frac{2a}{f_2^I + f_2^{II}} \right) \right\} \quad (۶۹)$$

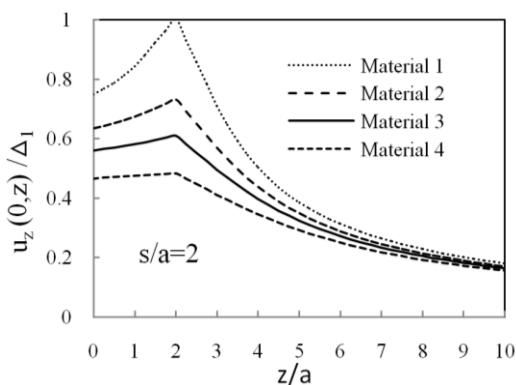
$$\text{sgn}(z-s) = \begin{cases} +1, & z > s \\ -1, & z < s \end{cases} \quad (۶۵)$$

اگر  $c_{11}$  تا  $c_{66}$  برای مصالح ایزوتروپ از رابطه (۴) جایگزین شوند، در این صورت رابطه (۶۴) به شرح زیر در می‌آید:



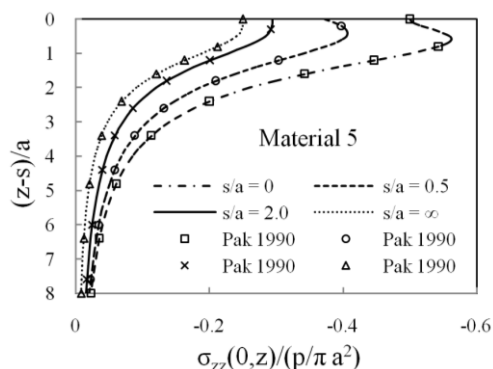


شکل ۵: مقایسه تغییر مکان در راستای عمق ماده ایزوتروپ با مقاله Gobert و Pak (۱۹۹۰)



شکل ۶: مقایسه تغییر مکان در راستای عمق برای محیطهای متفاوت با رفتار ایزوتروپ جانبی

تغییر مکان قائم برای محیطهای مختلف با رفتار ایزوتروپ جانبی برای  $s/a=2$  در شکل (۶) نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می شود با افزایش  $E'$ ، تغییر مکان قائم کاهش می یابد.



شکل ۷: مقایسه  $\sigma_{zz}$  بر حسب  $(z-s)/a$  در  $r=0$  ماده ایزوتروپ با مقاله Gobert و Pak (۱۹۹۰)

$$u_{z_0}(r, z) = \frac{2\Delta(c_{13} + c_{44})}{\pi(c_{44} + \sqrt{c_{11}c_{33}})(s_1 - s_2)} \text{sgn}(z-s) \left\{ \frac{\sqrt{f_1^I f_1^{II}} \sin \alpha_1 - \sqrt{f_2^I f_2^{II}} \sin \alpha_2}{r} \right\} \quad (70)$$

که در آن

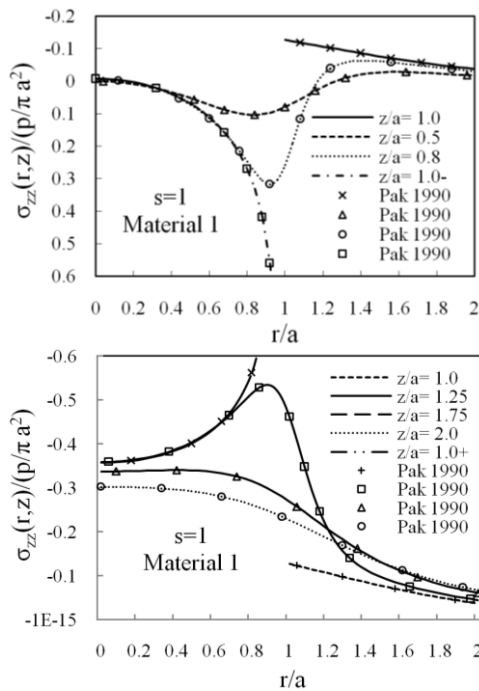
$$\begin{aligned} f_i^I &= \sqrt{d_i^2 + (a-r)^2} \\ f_i^{II} &= \sqrt{d_i^2 + (a+r)^2} \\ \alpha_i &= \frac{1}{2} \sin^{-1} \left( \frac{2ad_i}{f_i^I f_i^{II}} \right) \\ d_i &= s_i |s-z| \end{aligned} \quad (71)$$

به صورت مشابه برای حالت  $s=0$  (دیسک روی سطح) بدست می آید:

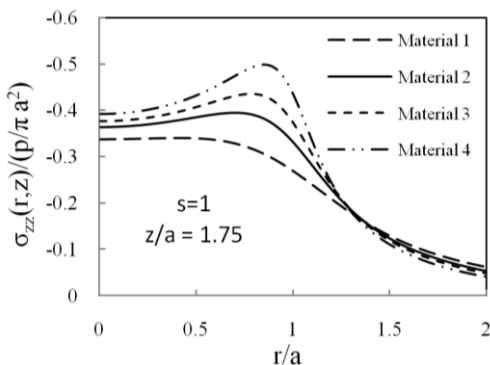
$$u_{z_0}(r, z) = \frac{2(c_{11}c_{33} - c_{13}^2)\Delta}{\pi(s_1^2 - s_2^2)c_{44}c_{33}} \times \left\{ \frac{v_2}{\eta_2} \sin^{-1} \left( \frac{2a}{f_1^I + f_1^{II}} \right) - \frac{v_1}{\eta_1} \sin^{-1} \left( \frac{2a}{f_2^I + f_2^{II}} \right) \right\} \quad (72)$$

$$u_{r_0}(r, z) = \frac{2(c_{11}c_{33} - c_{13}^2)(c_{13} + c_{44})\Delta}{\pi c_{44} \sqrt{c_{11}c_{33}} (s_1^2 - s_2^2)} \times \left\{ \frac{s_1}{r\eta_1} (1 - \sqrt{f_2^I f_2^{II}} \sin \alpha_2) - \frac{s_2}{r\eta_2} (1 - \sqrt{f_1^I f_1^{II}} \sin \alpha_1) \right\} \quad (73)$$

در حالت کلی  $0 < s < \infty$ ، (۶۲) و (۶۳) باید به صورت عددی برآورد شوند. دقت در نتایج تنها وابسته به کیفیت و دقت حل معادله انتگرالی فردهلم می باشد. علاوه بر آن در این مقاله حل تحلیلی برای دو حالت محیط بینهایت و دیسک روی سطح نیز ارائه شده است. شکل (۵) تغییر مکان در راستای قائم دیسک صلب مدفون در عمق های مختلف را نشان می دهد.



شکل ۹: مقایسه  $\sigma_{zz}$  بر حسب  $r$  ماده ایزوتروپ با مقاله Gobert و Pak (۱۹۹۰)



شکل ۱۰: مقایسه  $\sigma_{zz}$  بر حسب  $r$  در  $z/a=1.75$  برای محیط‌های با رفتار ایزوتروپ جانبی و با مصالح مختلف

### توزیع نیروی تماسی

با استفاده از معادله (۶۶) و رابطه زیر:

$$\int_0^\infty J_0(r\xi) \sin(\rho\xi) d\rho = \frac{1}{\sqrt{\rho^2 - r^2}} H(\rho - r) \quad (75)$$

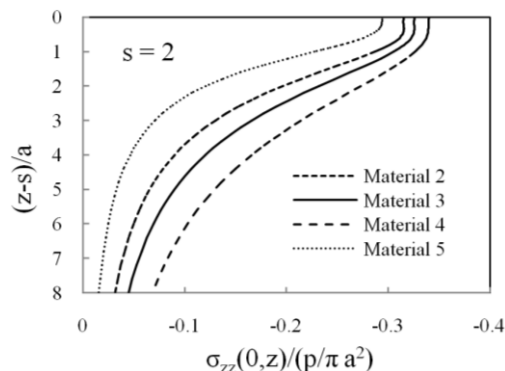
که در آن  $H(r)$  تابع هویساید (Heaviside) می‌باشد، توزیع نیروی تماسی به صورت زیر بدست می‌آید:

$$R(r) = \frac{2c_{44}}{\pi} \left[ \frac{\theta(a)}{\sqrt{a^2 - r^2}} - \int_r^a \frac{\theta'(\rho) d\rho}{\sqrt{\rho^2 - r^2}} \right] \quad (76)$$

همچنین از روند مشابهی برای محاسبه تنش‌ها می‌توان استفاده نمود. بدین منظور با استفاده از (۲۱) و (۲۲) داریم:

$$\sigma_{zz} = \int_0^\infty \xi (c_{33} \frac{d\Omega_2}{dz} - c_{13}\xi\gamma_3) \frac{\tilde{R}^0(\xi)}{c_{44}} J_0(r\xi) d\xi \quad (74)$$

تنش قائم  $\sigma_{zz}$  به صورت مشابه با تغییر مکان بدست می‌آید. نمونه‌ای از تغییرات شعاعی و قائم تنش  $\sigma_{zz}$  در اشکال (۷) و (۹) نشان داده شده‌است.



شکل ۸: مقایسه  $\sigma_{zz}$  بر حسب  $(z-s)/a$  در  $r=0$  برای محیط‌های با رفتار ایزوتروپ جانبی و با مصالح مختلف

تأثیر مصالح مختلف با رفتار ایزوتروپ جانبی بر تغییرات قائم تنش  $\sigma_{zz}$  در  $r=0$  برای عمق  $s=2$  در شکل (۸) نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود با افزایش  $E'$ ، تنش قائم  $\sigma_{zz}$  کاهش می‌یابد. همچنین در شکل (۱۰) تغییرات شعاعی تنش  $\sigma_{zz}$  برای محیط‌های با رفتار ایزوتروپ جانبی و مصالح مختلف ارائه شده است. با توجه به شکل (۱۰) مشاهده می‌شود که تنش شعاعی  $\sigma_{zz}$  با افزایش  $E'$ ، افزایش می‌یابد.

$$\lim_{s \rightarrow 0} \lim_{r \rightarrow a} \frac{R_s(r)}{R_0(r)} = \frac{\theta_{0^+}(a)}{\theta_0(a)} = \frac{2c_{44}\sqrt{c_{11}c_{33}}(s_1 + s_2)}{(c_{11}c_{33} - c_{13}^2) \left( \frac{\sqrt{c_{11}c_{33}} + c_{44}}{2c_{33}(s_1 + s_2)} - \frac{\sqrt{c_{11}c_{33}c_{44}}(s_1 + s_2)}{c_{11}c_{33} - c_{13}^2} \right)} \quad (۸۰)$$

تغییرات توزیع نیروی تماسی به عنوان تابعی از  $s$  در شکل (۱۱) نشان داده شده است. با افزایش  $s$  از صفر، توزیع نیروی تماسی ابتدا سریعاً کاهش پیدا می‌کند و سپس با افزایش  $s$ ، توزیع نیروی تماسی برای دو حالت دیسک روی سطح و محیط بینهایت به جواب‌های یکسانی همگرا می‌شود.

برای  $s \rightarrow \infty$ ، رابطه (۷۶) به معادله زیر تبدیل می‌شود

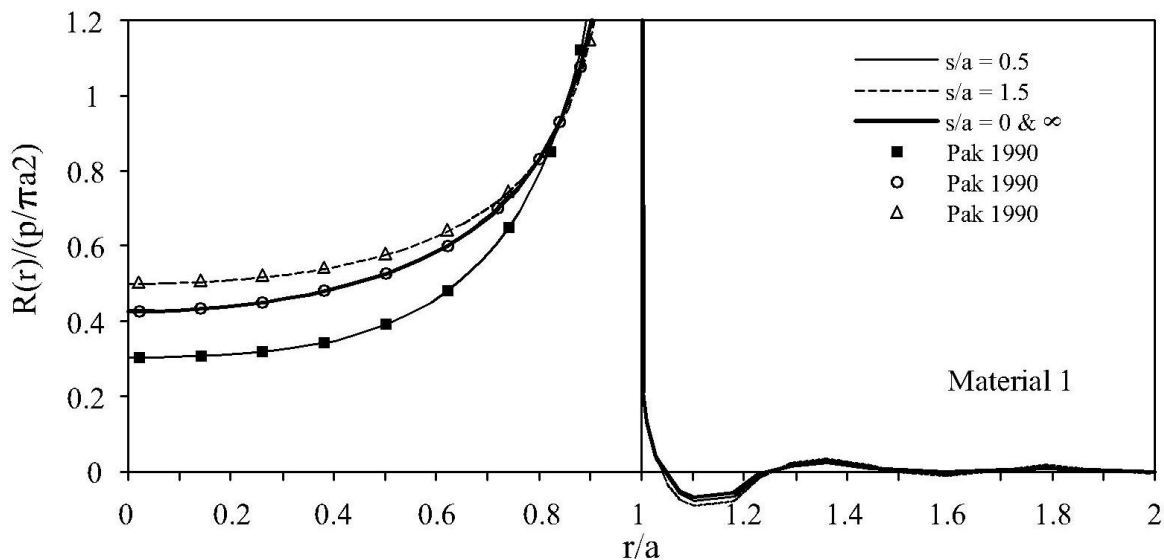
$$R_\infty(r) = \frac{4c_{33}c_{44}(s_1 + s_2)}{c_{44} + \sqrt{c_{11}c_{33}}} \frac{\Delta}{\pi\sqrt{a^2 - r^2}} \quad (۷۷)$$

و برای  $s = 0$  خواهیم داشت:

$$R_0(r) = \frac{c_{11}c_{33} - c_{13}^2}{(s_1 + s_2)\sqrt{c_{11}c_{33}}} \frac{2\Delta}{\pi\sqrt{a^2 - r^2}} \quad (۷۸)$$

با مقایسه روابط (۵۰) و (۵۱)، انتظار این می‌رود که توزیع نیروی تماسی برای  $s \rightarrow 0^+$  با آنچه در (۷۱) تشریح شده است، متفاوت باشد. در حقیقت، با کمک رابطه (۶۸) می‌توان نشان داد:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{R_s(r)}{R_0(r)} = 1, \quad r \in [0, a) \quad (۷۹)$$



شکل ۱۱: مقایسه توزیع نیروی تماسی بر دیسک ماده ایزوتروپ با مقاله Pak و Gobert (۱۹۹۰)

فردhelm نوع دوم، مسئله به صورت عددی حل شده است. همچنین مسئله در دو حالت محیط نامحدود و دیسک بروی سطح نیز در هر مرحله به صورت تحلیلی دقیق بدست آمده است. نتایج برای محیط‌های ایزوتروپ با استفاده از نتایج بدست آمده برای محیط‌های ایزوتروپ جانبی بصورت تحلیلی بدست آمده و با نتایج موجود برای محیط‌های ایزوتروپ مقایسه شده است. همچنین به منظور تأیید روش انتگرال‌گیری عددی انتخاب شده نتایج عددی برای محیط‌های ایزوتروپ با استفاده از جواب‌های نتیجه شده برای محیط‌های ایزوتروپ جانبی بدست آمده و با نتایج موجود برای محیط‌های ایزوتروپ مقایسه

## نتیجه‌گیری

در این مقاله یک روش تحلیلی دقیق برای بدست آوردن پاسخ محیط نیمه بینهایت با رفتار ایزوتروپ جانبی تحت اثر بار قائم وارد بر دیسک صلب مدفون ارائه شده است. معادلات تعادل دینامیکی حاکم بر مسئله در دستگاه مختصات استوانه‌ای  $(r, \theta, z)$  بصورت یک سری معادلات درگیر می‌باشد. با استفاده از دو تابع پتانسیل برای مسائل الاستودینامیک این معادلات بطور کامل مجزا سازی شده‌اند. با استفاده از تبدیل هنکل در امتداد شعاعی و اعمال شرایط مرزی معادلات انتگرالی دوگانه بدست آمده است. با تبدیل معادلات انتگرالی دوگانه به معادله انتگرالی

گردیده‌است. به منظور نشان دادن میزان نایزوتروپی مصالح بر پاسخ، نتایج عددی مختلف در هر قسمت ارائه گردیده‌است. همچنین توزیع نیروی تماسی با جزئیات مورد بررسی قرار گرفت.

## مراجع

1. J. Boussinesq. (1885). "Application des potential à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques." Gauthier-Villars. Paris.
2. J. W. Harding and I. N. Sneddon. (1945). "The elastic stresses produced by the indentation of the plane surface of a semi-infinite elastic solid by a rigid punch." Proc. Camb. Phil. Sec. 41, PP. 16-26.
3. W. D. Collins. (1962). "Some axially symmetric stress distributions in elastic solids containing penny-shaped cracks." Prec. Roy. Soc. Lond., Ser. A 203, PP. 359-386.
4. L. M. Keer. (1965). A note on the solution of two asymmetric boundary value problems. Int. J. Solids Struct. 1, PP. 257-264.
5. M. K. Kassir and G. C. Sih, (1968). "Some three-dimensional inclusion problems in elasticity." Int. J. Solids Struct. 4, PP. 225-241.
6. Snedon, I. N. (1951). Fourier transforms. McGraw-Hill, New York, N. Y.
7. L. M. Keer. (1967). "Mixed boundary value problems for an elastic half-space." Prec. Cambridge Phil. Sec. 63, PP. 1379-138.
8. D. A. Spence. (1968). "Self-similar solutions to adhesive contact problems with incremental loading." Proc. Roy. Soc. Lond., Ser. A 305, PP. 55-80.
9. A. P. S. Selvadurai. (1979). "Elastic Analysis of Soil-Foundation Interaction." Elsevier, North-Holland.
10. R. Butterfield and P. K. Banerjee (1971). "A rigid disc embedded in an elastic half-space." Geotech. Engrg. 2, PP. 35-49.
11. R. Y. S. Pak and A. T. Gobert. (1990). "On the axisymmetric interaction of a rigid disc with a semi-infinite solid." Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP), Vol. 41, 5, PP. 684-700.
12. Lekhnitskii, S. G. (1981). "Theory of elasticity of an anisotropic body." Mir Publishers Moscow.
13. A. Khojasteh, M. Rahimian, M. Eskandari and R. Y. S. Pak. (2008). "Asymmetric wave propagation in a transversely isotropic half-space in displacement potentials." Int. J. of Engineering Science, Vol. 46, 7, PP. 690-710.
14. Eskandari-Ghadi, M. (2005). "A complete solutions of the wave equations in the transversely isotropic media." J. o Elasticity, 81, PP. 1-19.
15. B. Noble. (1963). "The solution of Bessel function dual integral equations by a multiplying-factor method." Prec. Camb. Phil. Soc. 59, PP. 351-362.

## واژه‌های انگلیسی به ترتیب استفاده در متن

- |                                |                                |
|--------------------------------|--------------------------------|
| 1 – Rigid Disc                 | 10 – Orthotropic               |
| 2– Transversely Isotropic      | 11 – Contact Load distribution |
| 3 – Coupled                    | 12 – Inverse Transform         |
| 4 – Potential Function         | 13 – Bessel Function           |
| 5 – Elastodynamic              | 14 – Transformed Domain        |
| 6 – Hankel Transform           | 15 – Kernel                    |
| 7 – Dual Integral Equations    | 16 – Infinite Medium           |
| 8 – Fredholm Integral Equation | 17 – Surface Disk              |
| 9 – Anisotropic                | 18 – Axial Stiffness           |