

## تحلیل قاب با خواص مواد غیرقطعی

سید سعید برادران حسینی<sup>1</sup> و رضا عطارنژاد<sup>2\*</sup>

<sup>1</sup> دانشجوی دکتری سازه دانشکده مهندسی عمران - پردیس دانشکده های فنی - دانشگاه تهران

<sup>2</sup> دانشیار دانشکده مهندسی عمران - پردیس دانشکده های فنی - دانشگاه تهران

(تاریخ دریافت 86/7/10، تاریخ دریافت روایت اصلاح شده 88/10/10، تاریخ تصویب 89/6/30)

### چکیده

خصوصیات تصادفی عموماً به دو دسته وابسته به زمان و مستقل از زمان طبقه بندی می شوند. عدم قطعیت در هندسه یا خواص ماده غالباً به دسته مسائل تصادفی مستقل از زمان مربوط می شوند؛ در حالی که عدم قطعیت در بارگذاری و شرایط محیطی در دسته مسائل تصادفی وابسته به زمان جای می گیرند. در این بررسی، روش اجزای محدود برای مسائل سازه های شامل المان تیر و قاب صفحه ای با خواص مواد غیرقطعی و تحت شرایط بارگذاری استاتیکی (مسائل تصادفی استاتیکی) بسط داده شده است. فرضیات اساسی در این بررسی عبارتند از متغیر در نظر گرفته شدن مدول الاستیسیته ماده، تعریف میدان تغییر مکان (متغیر مستقل از زمان) به وسیله یک میدان تصادفی یک بعدی همگن و شرایط بارگذاری استاتیکی قطعی.

**واژه های کلیدی:** اجزاء محدود، ماتریس سختی، المان قاب، مدول الاستیسیته، تصادفی، سری تیلور، تابع تغییر

### مقدمه

المان برای مدول الاستیسیته، با روش انرژی بدست می آید. سپس بردار بار کلی استخراج گردیده و معادله تعادل کلی سازه (روابط بین نیروها و تغییر مکانها) برقرار می شود. ماتریس سختی کلی سازه و بردار تغییر مکان های گرهی، به صورت توابعی از متغیرهای تصادفی تعریف می شوند. این متغیرهای تصادفی، در واقع درجات مختلف ممان های تابع توزیع تصادفی روی عضو می باشند. در نهایت با بسط بردار تغییر مکان های گرهی توسط سری تیلور با تقریب مرتبه اول حول مقادیر میانگین این متغیرهای تصادفی، مقدار میانگین (امید ریاضی بردار تغییر مکان های گرهی) و توابع تغییرات تغییر مکان های گرهی سازه (عناصر قطر اصلی ماتریس کواریانس تغییر مکان های گرهی) استخراج می شود.

### استخراج ماتریس سختی برای عضو تیر

فرض می شود که خواص مواد در مجاورت مقادیر میانگین خود نوسان می کند؛ یا به عبارت دیگر، مدول الاستیسیته عضو بصورت تصادفی در امتداد طول آن تغییر می کند و تغییرات آن به شکل زیر است:

$$E^{(e)}(x) = E_0^{(e)} [1 + f^{(e)}(x)] \quad (1)$$

که در آن  $E_0^{(e)}$  مقدار میانگین مدول الاستیسیته

اگر یک آزمایش یکسان چندین بار اجرا شود و نتایج به دست آمده همیشه مشابه باشند (با قاعده یا بدون قاعده)، فرآیند قطعی نامیده می شود. اگر زمانی که همه شرایط تحت کنترل آزمایش گر یکسان باقی بماند، نتایج با یکدیگر متفاوت باشد، فرآیند غیرقطعی یا تصادفی نامیده می شود. سیستم های سازه های دارای عدم قطعیت، سیستم های تصادفی نامیده می شوند که این عدم قطعیت می تواند مربوط به هندسه، خواص مواد یا شرایط بارگذاری باشد. خصوصیات تصادفی عموماً به دو دسته وابسته به زمان و مستقل از زمان طبقه بندی می شوند. عدم قطعیت در هندسه یا خواص ماده غالباً به دسته مسائل تصادفی مستقل از زمان مربوط می شوند؛ در حالی که عدم قطعیت در بارگذاری و شرایط محیطی در دسته مسائل تصادفی وابسته به زمان جای می گیرند. در این بررسی، روش اجزای محدود تصادفی برای مسائل سازه ای با خواص مواد غیرقطعی و تحت شرایط بارگذاری استاتیکی (مسائل تصادفی استاتیکی) بسط داده شده است. فرضیات اساسی عبارتند از متغیر در نظر گرفته شدن مدول الاستیسیته، ثابت فرض شدن ضریب پواسون، تعریف میدان تغییر مکان (متغیر مستقل از زمان) به وسیله یک میدان تصادفی یک بعدی همگن و شرایط بارگذاری استاتیکی قطعی. در این بررسی، ابتدا ماتریس سختی المان تیر و قاب صفحه ای با فرض توابع توزیع غیر قطعی (تصادفی) روی

$$\{S\} = \left\{ \frac{d^2 N_1}{dx^2} \frac{d^2 N_2}{dx^2} \frac{d^2 N_3}{dx^2} \frac{d^2 N_4}{dx^2} \right\} \quad (8)$$

و  $I^{(e)}$  ممان اینرسی مقطع عرضی حول محور خمشی می‌باشد. پس از یک سری عملیات ریاضی بر روی رابطه (7)، ماتریس سختی عضو تیر با خواص مواد تصادفی به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$K^{(e)} = K_0^{(e)} + X_0^{(e)} \cdot \Delta K_0^{(e)} + X_1^{(e)} \cdot \Delta K_1^{(e)} + X_2^{(e)} \cdot \Delta K_2^{(e)} \quad (9)$$

که در آن:

$$K_0^{(e)} = E_0^{(e)} I^{(e)} \begin{bmatrix} 12/L^3 & 6/L^2 & -12/L^3 & 6/L^2 \\ 6/L^2 & 4/L & -6/L^2 & 2/L \\ -12/L^3 & -6/L^2 & 12/L^3 & -6/L^2 \\ 6/L^2 & 2/L & -6/L^2 & 4/L \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\Delta K_0^{(e)} = E_0^{(e)} I^{(e)} \begin{bmatrix} 36/L^4 & 24/L^3 & -36/L^4 & 12/L^3 \\ 24/L^3 & 16/L^2 & -24/L^3 & 8/L^2 \\ -36/L^4 & -24/L^3 & 36/L^4 & -12/L^3 \\ 12/L^3 & 8/L^2 & -12/L^3 & 4/L^2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\Delta K_1^{(e)} = E_0^{(e)} I^{(e)} \begin{bmatrix} -144/L^5 & -84/L^4 & 144/L^5 & -60/L^4 \\ -84/L^4 & -48/L^3 & 84/L^4 & -36/L^3 \\ 144/L^5 & 84/L^4 & -144/L^5 & 60/L^4 \\ -60/L^4 & -36/L^3 & 60/L^4 & -24/L^3 \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\Delta K_2^{(e)} = E_0^{(e)} I^{(e)} \begin{bmatrix} 144/L^6 & 72/L^5 & -144/L^6 & 72/L^5 \\ 72/L^5 & 36/L^4 & -72/L^5 & 36/L^4 \\ -144/L^6 & -72/L^5 & 144/L^6 & -72/L^5 \\ 72/L^5 & 36/L^4 & -72/L^5 & 36/L^4 \end{bmatrix} \quad (13)$$

و  $X_0^{(e)}$ ،  $X_1^{(e)}$ ،  $X_2^{(e)}$  متغیرهای تصادفی بوده و در واقع ممان‌های تابع تصادفی  $f^{(e)}(x)$  هستند و از آنجا که این تابع دارای مقدار میانگین صفر است، همه آنها مقدار میانگین صفر داشته و به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$X_0^{(e)} = \int_0^{L^{(e)}} f^{(e)}(x) dx \quad (14)$$

$$X_1^{(e)} = \int_0^{L^{(e)}} x \cdot f^{(e)}(x) dx \quad (15)$$

$$X_2^{(e)} = \int_0^{L^{(e)}} x^2 \cdot f^{(e)}(x) dx \quad (16)$$

ماتریس سختی عضو که در رابطه (9) بیان گردید دارای دو بخش است. یک بخش قطعی که به صورت مقدار میانگین  $K_0^{(e)}$  بوده و بخش دیگر تصادفی است که به

و  $f^{(e)}(x)$  میدان تصادفی نماینده میزان نوسانات همگن، یک بعدی و دارای میانگین صفر، می‌باشد. با این فرض که مدول الاستیسیته نباید منفی باشد؛ میدان تصادفی  $f^{(e)}(x)$  به صورت زیر محدود می‌گردد:

$$-1 + \delta \leq f^{(e)}(x) \leq 1 - \delta \quad (2-الف)$$

$$0 \leq x \leq L^{(e)} \quad (2-ب)$$

که در آن  $\delta$  باید شرط  $0 < \delta < 1$  را ارضا نماید و  $L^{(e)}$  طول عضو می‌باشد. بالانویس (e) در عبارات برای مرتبط ساختن پارامترها به یک عضو به کار می‌رود.

یک عضو تیر دارای چهار درجه آزادی است، به این ترتیب که  $v_i$  و  $v_j$  تغییر مکان‌های قائم دو نقطه گرهی  $i$  و  $j$  و  $\theta_i$  و  $\theta_j$  تغییر مکان‌های دورانی نقاط گرهی بوده و  $L$  طول عضو می‌باشد. مدول الاستیسیته به صورت رابطه (1) فرض می‌شود.

بردار تغییر مکان نقاط گرهی ب صورت زیر است:

$$U^{(e)T} = \{v_i \theta_i v_j \theta_j\} \quad (3)$$

تغییر مکان هر نقطه از عضو عبارت است از:

$$u^{(e)} = N_1 v_i + N_2 \theta_i + N_3 v_j + N_4 \theta_j \quad (4)$$

که در آن:

$$N_1 = 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \quad (5-الف)$$

$$N_2 = x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \quad (5-ب)$$

$$N_3 = \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \quad (5-ج)$$

$$N_4 = -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \quad (5-د)$$

در روابط فوق  $N_i$  ها توابع شکل عضو می‌باشند. رابطه (4) در قالب ماتریسی به شکل زیر بازنویسی می‌شود:

$$u^{(e)} = \{N\}^{(e)T} \{U\}^{(e)} \quad (6)$$

که در آن  $\{N\}^{(e)T} = \{N_1 N_2 N_3 N_4\}$  می‌باشد. ماتریس سختی عضو تیر به صورت زیر بیان می‌شود:

$$K^{(e)} = \int_0^{L^{(e)}} [S]^T E^{(e)} I^{(e)} [S] dx \quad (7)$$

که در آن:

دستگاه مختصات محلی  $x' - y'$ ، دستگاه مختصات کلی  $x - y$  و تغییر مکان‌های گرهی متناظر در دو دستگاه در شکل نشان داده شده است. عضو در امتداد زاویه  $\theta$  با محور  $x$  قرار گرفته است. رابطه بین دستگاه مختصات کلی و دستگاه مختصات محلی برای ماتریس سختی عضو طبق رابطه زیر بیان می‌شود:

$$K_g^{(e)} = T^{(e)T} \cdot K_1^{(e)} \cdot T^{(e)} \quad (19)$$

که در آن  $T$  ماتریس تبدیل دستگاه مختصات عضو می‌باشد و به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$T^{(e)} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (20)$$

ماتریس سختی عضو قاب در دستگاه مختصات محلی عبارتست از:

$$K_1^{(e)} = K_{01}^{(e)} + X_0^{(e)} \cdot \Delta K_{01}^{(e)} + X_1^{(e)} \cdot \Delta K_{11}^{(e)} + X_2^{(e)} \cdot \Delta K_{21}^{(e)} \quad (21)$$

ماتریس سختی عضو در دستگاه مختصات کلی به شکل زیر بیان می‌شود:

$$K_g^{(e)} = K_{0g}^{(e)} + X_0^{(e)} \cdot \Delta K_{0g}^{(e)} + X_1^{(e)} \cdot \Delta K_{1g}^{(e)} + X_2^{(e)} \cdot \Delta K_{2g}^{(e)} \quad (22)$$

که در آن:

$$K_{0g}^{(e)} = T^{(e)T} \cdot K_{01}^{(e)} \cdot T^{(e)} \quad (23)$$

$$\Delta K_{0g}^{(e)} = T^{(e)T} \cdot \Delta K_{01}^{(e)} \cdot T^{(e)} \quad (24)$$

$$\Delta K_{1g}^{(e)} = T^{(e)T} \cdot \Delta K_{11}^{(e)} \cdot T^{(e)} \quad (25)$$

$$\Delta K_{2g}^{(e)} = T^{(e)T} \cdot \Delta K_{21}^{(e)} \cdot T^{(e)} \quad (26)$$

در روابط (14) تا (16) تعریف شده‌اند و  $\Delta K_{21}^{(e)}, \Delta K_{11}^{(e)}, \Delta K_{01}^{(e)}$  با مقادیر تعریف شده  $\Delta K_{2g}^{(e)}, \Delta K_{1g}^{(e)}, \Delta K_{0g}^{(e)}$  در ضمیمه (1) یکسان هستند.

صورت  $X_0^{(e)} \cdot \Delta K_{0g}^{(e)} + X_1^{(e)} \cdot \Delta K_{1g}^{(e)} + X_2^{(e)} \cdot \Delta K_{2g}^{(e)}$  بیان می‌گردد.

### استخراج ماتریس سختی برای عضو قاب

شش درجه آزادی عضو قاب عبارتند از تغییر مکان‌های محوری، قائم و دورانی برای هر نقطه گرهی. این درجات آزادی به ترتیب با  $u_i, v_i$  و  $\theta_i$  برای گره  $i$  و  $u_j, v_j$  و  $\theta_j$  برای گره  $j$  بیان می‌شوند و به شکل برداری داریم:

$$U^{(e)T} = \{u_i, v_i, \theta_i, u_j, v_j, \theta_j\} \quad (17)$$

ماتریس سختی عضو قاب، یک ماتریس مربعی مرتبه شش است که از ترکیب ماتریس سختی عضو میله‌ای و ماتریس سختی عضو تیر بدست می‌آید. چنانچه مراحل استخراج ماتریس سختی به شیوه مشابه انجام شود، ماتریس سختی عضو قاب به شکل زیر به دست می‌آید:

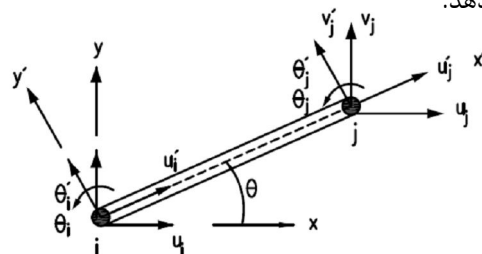
$$K^{(e)} = K_0^{(e)} + X_0^{(e)} \cdot \Delta K_0^{(e)} + X_1^{(e)} \cdot \Delta K_1^{(e)} + X_2^{(e)} \cdot \Delta K_2^{(e)} \quad (18)$$

که اجزاء مختلف آن در ضمیمه (1) و روابط (14) تا (16) تعریف شدند. در روابط ضمیمه (1)،  $I, A, E_0$  و همان مقادیر  $L^{(e)}, I^{(e)}, A^{(e)}, E_0^{(e)}$  هستند که برای سادگی بدین ترتیب نشان داده شده‌اند.

به طوری که در ضمیمه (1) ملاحظه می‌شود،  $K_0^{(e)}, \Delta K_0^{(e)}, \Delta K_1^{(e)}, \Delta K_2^{(e)}$  ماتریس‌های متقارن هستند.

### ماتریس سختی عضو در دستگاه مختصات کلی

برای تشکیل ماتریس سختی کل سازه، لازم است ماتریس‌های اعضا در دستگاه مختصات محلی به دستگاه مختصات کلی انتقال یابد. شکل (1) یک عضو قاب که به صورت دلخواه در صفحه کلی  $x - y$  قرار گرفته را نشان می‌دهد.



شکل 1: عضو قاب در دستگاه‌های مختصات محلی و کلی.

متغیرهای تصادفی  $X_i^{(e)}$  بسط داده شود، خواهیم داشت:

$$\{U\} \cong \{U\}_0 + \sum_{e=1}^N \sum_{i=0}^M (X_i^{(e)} - \bar{X}_i^{(e)}) \left[ \frac{\partial \{U\}}{\partial X_i^{(e)}} \right]_E \quad (33)$$

که در آن  $M=2$  (برای قاب‌ها) است. علامت  $[ ]_E$  بیانگر این است که مشتق در مقادیر میانگین متغیرهای تصادفی  $X_i^{(e)}$  محاسبه می‌شود. مؤلفه  $\left[ \frac{\partial \{U\}}{\partial X_i^{(e)}} \right]_E$  در رابطه (33) توسط دیفرانسیل‌گیری جزئی از رابطه (28) نسبت به  $X_i^{(e)}$  و با استفاده از رابطه (32)، به شکل زیر بازنویسی می‌شود:

$$\left[ \frac{\partial \{U\}}{\partial X_i^{(e)}} \right]_E = -[K]_b^{-1} \left[ \frac{\partial [K]}{\partial X_i^{(e)}} \right]_E \{U\}_0 \quad (34)$$

با قرار دادن رابطه (34) در رابطه (33) و با توجه به رابطه (30)، رابطه (33) به شکل زیر بازنویسی می‌شود:

$$\{U\} \cong \{U\}_0 - \sum_{e=1}^N \sum_{i=0}^M [K]_b^{-1} \left[ \frac{\partial [K]}{\partial X_i^{(e)}} \right]_E \{U\}_0 X_i^{(e)} \quad (35)$$

امید ریاضی (E) یا مقدار منتظره  $\{U\}$  برابر است با:

$$E\{U\} = \{U\}_0 \quad (36)$$

رابطه (36) نشان‌دهنده مقدار میانگین تغییر مکان‌های گرهی با تقریب مرتبه اول می‌باشد. ماتریس کواریانس  $\{U\}$  برابر است با:

$$\begin{aligned} Cov\{\{U\}, \{U\}\} &= E\{(\{U\} - \{U\}_0)^T (\{U\} - \{U\}_0)\} \\ &= \sum_{e_1=1}^N \sum_{e_2=1}^N \sum_{i_1=0}^M \sum_{i_2=0}^M [K]_b^{-1} \left[ \frac{\partial [K]}{\partial X_{i_1}^{(e_1)}} \right]_E \{U\}_0 \end{aligned} \quad (37)$$

$$\{U\}_0^T \left[ \frac{\partial [K]}{\partial X_{i_1}^{(e_1)}} \right]_E^T ([K]_b^{-1})^T . E\{X_{i_1}^{(e_1)} X_{i_2}^{(e_2)}\}$$

که در آن  $M$  و  $N$  قبلاً تعریف شده‌اند.

طبق تعریف امید ریاضی، عبارت  $E\{X_{i_1}^{(e_1)} X_{i_2}^{(e_2)}\}$  به صورت زیر بیان می‌شود:

$$E\{X_{i_1}^{(e_1)} X_{i_2}^{(e_2)}\} = \int_0^{L^{(e_1)}} \int_0^{L^{(e_2)}} x_1^{i_1} x_2^{i_2} E[f^{(e_1)}(x_1) f^{(e_2)}(x_2)] dx_1 dx_2 \quad (38)$$

فرض می‌کنیم همه اعضا با یک میدان تصادفی  $f(x)$  یکسان مشخص می‌گردند و لذا:

## تشکیل ماتریس سختی کلی و معادله تعادل

ماتریس سختی کلی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$[K] = \sum_{e=1}^N [K_g]^{(e)} \quad (27)$$

که در آن  $N$  تعداد کل اعضا و  $[K_g]^{(e)}$  ماتریس سختی تبدیل یافته در دستگاه مختصات کلی می‌باشد. لازم به ذکر است که ماتریس‌های سختی اعضا و در نتیجه ماتریس سختی کل، تابعی از متغیرهای تصادفی  $X_i^{(e)}$  ( $i=0,1,2$ ) هستند.

معادله تعادل به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$[K] \{U\} = \{P\} \quad (28)$$

که در آن  $[K]$  توسط رابطه (27) بیان می‌شود و  $\{U\}$  بردار تغییر مکان گرهی کلی و  $\{P\}$  بردار نیروی قطعی کلی سازه می‌باشد.

## تحلیل تغییرات تغییر مکان‌های گرهی

متغیرهای تصادفی ماتریس سختی به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$X_i^{(e)} = \int_0^{L^{(e)}} x^i f^{(e)}(x) dx ; (i = 0,1,2) \quad (29)$$

که در آن،  $e=1,2,\dots,N$  و  $N$  تعداد کل اعضا می‌باشد.

با توجه به رابطه (29)، تابع تصادفی با میانگین صفر می‌باشد. بنابراین بدیهی است که متغیرهای تصادفی  $X_i^{(e)}$  دارای میانگین صفر هستند:

$$\bar{X}_i^{(e)} = 0 ; (i = 0,1,2) ; (e = 1,2,\dots,N) \quad (30)$$

بنابراین ماتریس سختی  $[K]$  و بردار تغییر مکان‌های گرهی  $\{U\}$  هر دو تابعی از متغیرهای تصادفی  $X_i^{(e)}$  بوده و لذا و به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{aligned} [K] &= [K](X_i^{(e)}; e = 1,2,\dots,N; i = 0,1,2) \\ \{U\} &= \{U\}(X_i^{(e)}; e = 1,2,\dots,N; i = 0,1,2) \end{aligned} \quad (31)$$

اگر  $[K]_0$  و  $\{U\}_0$  برای نمایش مقادیر ماتریس سختی و بردار تغییر مکان گرهی در بکار روند، رابطه زیر بین این مقادیر وجود دارد:

$$\{U\}_0 = [K]_b^{-1} \{P\} \quad \text{یا} \quad [K]_b \{U\}_0 = \{P\} \quad (32)$$

اگر بردار تغییر مکان گرهی  $\{U\}$  در رابطه (31) توسط سری تیلور با تقریب مرتبه اول حول مقادیر میانگین

$$\text{Var} \{U\} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{ff}(k) \{V(K)\} dk \quad (45)$$

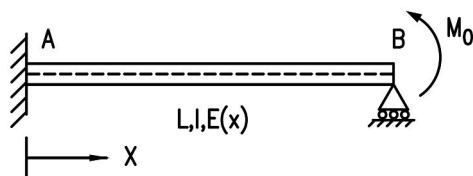
که در آن:

$$\{V(K)\} = \sum_{e=1}^N \sum_{i_1=0}^M \sum_{i_2=0}^M \text{diag} \left( [K]_0^{-1} \left[ \frac{\partial [K]}{\partial X_{i_1}^{(e)}} \right] \{U\}_0 \right) \cdot [K]_0^{-1} \left[ \frac{\partial [K]}{\partial X_{i_2}^{(e)}} \right] \{U\}_0 \cdot \int_0^{L^{(e_1)}} x_1^{i_1} e^{ikx_1} dx_1 \cdot \int_0^{L^{(e_2)}} x_2^{i_2} e^{-ikx_2} dx_2 \quad (46)$$

بردار  $V(K)$  دارای مؤلفه‌هایی برابر با تعداد کل درجات آزادی سیستم سازه‌ای می‌باشد. هر مؤلفه  $V(K)$ ، «تابع تغییرات پاسخ» در درجه آزادی مربوطه، می‌باشد.

### بررسی یک مساله نمونه

یک تیر به طول  $L$  با مقطع ثابت (مان اینرسی مقطع  $I$  ثابت) با شرایط تکیه‌گاهی و بارگذاری مطابق شکل (2) در نظر می‌گیریم.



شکل 2: تیر مورد بررسی در مساله نمونه.

چنانچه مدول الاستیسیته در طول تیر ثابت و برابر  $E_0$  فرض شود، با استفاده از روابط تحلیل سازه‌ها داریم:

$$\begin{aligned} \theta_B &= \frac{M_0 L}{4E_0 I} \\ V_A &= \frac{3M_0}{2L} \\ M_A &= \frac{M_0}{2} \\ V_B &= -\frac{3M_0}{2L} \end{aligned} \quad (47)$$

حال مدول الاستیسیته تابعی از طول تیر و به صورت زیر فرض می‌شود:

$$E(x) = E_0 [1 + f(x)] \quad (48)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} E[f^{(e_1)}(x_1) f^{(e_2)}(x_2)] \\ = E[f(x_1) f(x_2)] = R_{ff}(x_1 - x_2) \end{aligned} \quad (39)$$

بنابراین رابطه (38) به شکل زیر بازنویسی می‌شود:

$$E \{X_{i_1}^{(e_1)} X_{i_2}^{(e_2)}\} = \int_0^{L^{(e_1)}} \int_0^{L^{(e_2)}} x_1^{i_1} x_2^{i_2} R_{ff}(x_1 - x_2) dx_1 dx_2 \quad (40)$$

در روابط فوق  $R_{ff}(x)$  تابع همبستگی میدان تصادفی  $f(x)$  می‌باشد. با استفاده از تئوری احتمالات، رابطه زیر برقرار است:

$$R_{ff}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{ff}(k) e^{ikx} dk \quad (41)$$

که در آن  $S_{ff}(k)$  تابع چگالی طیفی توانی مربوط به میدان تصادفی  $f(x)$  و  $k$  عدد موج می‌باشد. رابطه (40) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$E \{X_{i_1}^{(e_1)} X_{i_2}^{(e_2)}\} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{ff}(k) \int_0^{L^{(e_1)}} x_1^{i_1} e^{ikx_1} dx_1 \cdot \int_0^{L^{(e_2)}} x_2^{i_2} e^{-ikx_2} dx_2 dk \quad (42)$$

با جایگزینی رابطه (42) در (37)، داریم:

$$\begin{aligned} \text{Cov}[\{U\}, \{U\}] = \\ \int_{-\infty}^{+\infty} S_{ff}(k) \sum_{e=1}^N \sum_{i_1=0}^M \sum_{i_2=0}^M [K]_0^{-1} \left[ \frac{\partial [K]}{\partial X_{i_1}^{(e)}} \right] \{U\}_0 \{U\}_0^T \left[ \frac{\partial [K]}{\partial X_{i_2}^{(e)}} \right]^T \\ ([K]_0^{-1})^T \cdot \int_0^{L^{(e_1)}} x_1^{i_1} e^{ikx_1} dx_1 \cdot \int_0^{L^{(e_2)}} x_2^{i_2} e^{-ikx_2} dx_2 dk \end{aligned} \quad (43)$$

بردار تغییرات تغییر مکان‌های گرهی شامل اعضای قطری ماتریس کواریانس تغییر مکان‌های گرهی می‌شود. بنابراین بردار تغییرات تغییر مکان‌ها برابر است با:

$$\begin{aligned} \text{Var}\{U\} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{ff}(k) \sum_{e=1}^N \sum_{i_1=0}^M \sum_{i_2=0}^M \text{diag} \left( ([K]_0^{-1} \left[ \frac{\partial [K]}{\partial X_{i_1}^{(e)}} \right] \{U\}_0) [K]_0^{-1} \left[ \frac{\partial [K]}{\partial X_{i_2}^{(e)}} \right] \right) \\ \{U\}_0 \cdot \int_0^{L^{(e_1)}} x_1^{i_1} e^{ikx_1} dx_1 \cdot \int_0^{L^{(e_2)}} x_2^{i_2} e^{-ikx_2} dx_2 dk \end{aligned} \quad (44)$$

که در آن،  $[K]$  ماتریس سختی کلی می‌باشد. بردار تغییرات به شکل زیر قابل بازنویسی است:

همان‌گونه که ملاحظه می‌شود، مقدار دوران گره  $B$ ، بین حد پایین و بالای ارائه شده در روابط (50) و (51) و نزدیک به مقدار تقریبی محاسبه شده در رابطه (53) است. حال چنانچه برای تحقیق صحت مقدار به دست آمده در رابطه (58)، با استفاده از روابط (9) تا (16)، ماتریس سختی کلی تیر را تشکیل دهیم، خواهیم داشت:

$$K = E_0 I \begin{bmatrix} 13.2/L^3 & 6.6/L^2 & -13.2/L^3 & 6.6/L^2 \\ 6.6/L^2 & 67/15L & -6.6/L^2 & 32/15L \\ -13.2/L^3 & -6.6/L^2 & 13.2/L^3 & -6.6/L^2 \\ 6.6/L^2 & 32/15L & -6.6/L^2 & 67/15L \end{bmatrix} \quad (59)$$

ا حل دستگاه معادلات رابطه (28)، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \theta_B &= \frac{15M_0L}{67E_0I} \\ V_A &= \frac{99M_0}{67L} \\ M_A &= \frac{32M_0}{67} \\ V_B &= -\frac{99M_0}{67L} \end{aligned} \quad (60)$$

که نشان می‌دهد آنچه بر اساس بسط به سری تیلور در رابطه (58) و با استفاده از رابطه (35) به دست آمده است، با نتیجه حاصل از حل دستگاه معادلات انطباق دارد و لذا به جای محاسبه و تشکیل ماتریس سختی کلی سازه در حالت غیرقطعی و حل دستگاه معادلات در این حالت، می‌توان ابتدا مقادیر تغییرمکان‌های گرهی را با فرض ثابت بودن مدول الاستیسیته محاسبه و سپس با استفاده از رابطه (35) و روابط بعدی، مقادیر واقعی تغییرمکان‌های گرهی را محاسبه نمود.

### جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

در این بررسی، ابتدا ماتریس سختی اعضای میله‌ای، تیر و قاب صفحه‌ای با خواص مواد تصادفی به دست آمده و سپس، روابط بین نیروها و تغییر مکان‌ها بیان گردید. در نهایت با کمک بسط به سری تیلور و تئوری احتمالات، مقدار میانگین و تابع تغییرات تغییر مکان‌های گرهی سازه با مدول الاستیسیته تصادفی استخراج گردید.

این روش می‌تواند برای تعیین نیروهای داخلی و تنش‌های اعضا و عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی مورد استفاده قرار گیرد. همچنین قابل بسط به سایر انواع المان‌ها (از جمله پوسته، ورق و ...) نیز می‌باشد.

$$f(x) = \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad (49)$$

ابتدا حدود بالا و پایین مقدار دوران گره  $B$  را محاسبه می‌کنیم. برای محاسبه حد پایین دوران گره  $B$ ، کافیست در رابطه (47)، بجای مقدار  $E_0$ ، مقدار  $E_{\max} = \frac{5}{4}E_0$  را قرار دهیم. در این صورت، خواهیم داشت:

$$\text{Lower Bound } \theta_B = \frac{M_0L}{5E_0I} \quad (50)$$

برای محاسبه حد بالای دوران گره  $B$ ، کافی است در رابطه (47)، بجای مقدار  $E_0$ ، مقدار  $E_{\min} = E_0$  را قرار دهیم. در این صورت، خواهیم داشت:

$$\text{Upper Bound } \theta_B = \frac{M_0L}{4E_0I} \quad (51)$$

یک تقریب اولیه از مقدار دوران گره  $B$  (که آن را  $\theta_B^*$  می‌نامیم)، با قرار دادن مقدار متوسط مدول الاستیسیته تیر ( $E_{\text{avg}}$ ) در رابطه (47) به دست می‌آید:

$$E_{\text{avg}} = \frac{1}{L} \int_0^L E(x) dx = \frac{7}{6} E_0 \quad (52)$$

$$\theta_B^* = \frac{3M_0L}{14E_0I} \quad (53)$$

حال برای محاسبه مقدار دوران گره  $B$  با استفاده از رابطه (35)، داریم:

$$\{U\} \cong \{U\}_0 - \sum_{i=0}^2 [K]^{-1} \left[ \frac{\partial [K]}{\partial X_i} \right] \{U\}_0 X_i \quad (54)$$

با استفاده از روابط (14) تا (16) داریم:

$$X_0 = \int_0^L f(x) dx = \frac{L}{6} \quad (55)$$

$$X_1 = \int_0^L x \cdot f(x) dx = \frac{L^2}{12} \quad (56)$$

$$X_2 = \int_0^L x^2 \cdot f(x) dx = \frac{L^3}{20} \quad (57)$$

بنابراین پس از عملیات محاسبه و ساده‌سازی خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \theta_B &= \theta_{0_B} - \sum_{i=0}^2 [K]^{-1} \left[ \frac{\partial [K]}{\partial X_i} \right] \{U\}_0 X_i \\ &= \frac{M_0L}{4E_0I} - \frac{7M_0L}{268E_0I} = \frac{15M_0L}{67E_0I} \end{aligned} \quad (58)$$

## مراجع

- 1 - Shinozuka, M. and Deodatis, G. (1988). "Response variability of stochastic finite element systems." *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, Vol. 114, No. 3, PP. 499 - 519.
  - 2 - Vanmarcke, E. and Grigoriu, M. (1983). "Stochastic finite element analysis of simple beams." *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, Vol. 109, No. 5, PP. 1203 - 1214.
  - 3 - Yamazaki, F. and Shinozuka, M. (1988). "Neuman expansion for stochastic finite element analysis." *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, Vol. 114, No. 8, PP. 1335 - 1354.
  - 4 - Zhang, Q. L. and Peil, U. (1997). "Random finite element analysis for stochastic responses of structures." *Computers & Structures*, Vol. 62, No. 4, PP. 611 - 616.
  - 5 - Miller, Irwin and Freund, John E. (1985). *Probability and Statistics for Engineers*, Prentice-Hall, Inc.
  - 6 - Classification Approach for Reliability Analysis with Stochastic Finite-Element Modeling. by Jorge E. Hurtado and Diego A. Alvarez. *Journal of Structural Engineering*, Vol. 129, No. 8, August 2003, PP. 1141-1149.
  - 7 - Latin Hypercube Sampling for Stochastic Finite Element Analysis. by Anders M. J. Olsson and Göran E. Sandberg. *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 128, No. 1, January 2002, PP. 121-125.
-

## ضمیمه (1): اجزاء مختلف رابطه (18):

$$\begin{aligned}
 K_0^{(e)} &= \begin{bmatrix} \frac{AE_0}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE_0}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12E_0I}{L^3} & \frac{6E_0I}{L^2} & 0 & \frac{12E_0I}{L^3} & \frac{6E_0I}{L^2} \\ 0 & \frac{6E_0I}{L^2} & \frac{4E_0I}{L} & 0 & \frac{6E_0I}{L^2} & \frac{2E_0I}{L} \\ -\frac{AE_0}{L} & 0 & 0 & \frac{AE_0}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12E_0I}{L^3} & -\frac{6E_0I}{L^2} & 0 & \frac{12E_0I}{L^3} & -\frac{6E_0I}{L^2} \\ 0 & \frac{6E_0I}{L^2} & \frac{2E_0I}{L} & 0 & -\frac{6E_0I}{L^2} & \frac{4E_0I}{L} \end{bmatrix} \\
 \Delta K_0^{(e)} &= \begin{bmatrix} \frac{AE_0}{L^2} & 0 & 0 & -\frac{AE_0}{L^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{36E_0I}{L^4} & \frac{24E_0I}{L^3} & 0 & -\frac{36E_0I}{L^4} & \frac{12E_0I}{L^3} \\ 0 & \frac{24E_0I}{L^3} & \frac{16E_0I}{L^2} & 0 & -\frac{24E_0I}{L^3} & \frac{8E_0I}{L^2} \\ -\frac{AE_0}{L^2} & 0 & 0 & \frac{AE_0}{L^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{36E_0I}{L^4} & -\frac{24E_0I}{L^3} & 0 & \frac{36E_0I}{L^4} & -\frac{12E_0I}{L^3} \\ 0 & \frac{12E_0I}{L^3} & \frac{8E_0I}{L^2} & 0 & -\frac{12E_0I}{L^3} & \frac{4E_0I}{L^2} \end{bmatrix} \\
 \Delta K_1^{(e)} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{144E_0I}{L^5} & -\frac{84E_0I}{L^4} & 0 & \frac{144E_0I}{L^5} & -\frac{60E_0I}{L^4} \\ 0 & -\frac{84E_0I}{L^4} & -\frac{48E_0I}{L^3} & 0 & \frac{84E_0I}{L^4} & -\frac{36E_0I}{L^3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{144E_0I}{L^5} & \frac{84E_0I}{L^4} & 0 & -\frac{144E_0I}{L^5} & \frac{60E_0I}{L^4} \\ 0 & -\frac{60E_0I}{L^4} & -\frac{36E_0I}{L^3} & 0 & \frac{60E_0I}{L^4} & -\frac{24E_0I}{L^3} \end{bmatrix} \\
 \Delta K_2^{(e)} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{144E_0I}{L^6} & \frac{72E_0I}{L^5} & 0 & -\frac{144E_0I}{L^6} & \frac{72E_0I}{L^5} \\ 0 & \frac{72E_0I}{L^5} & \frac{36E_0I}{L^4} & 0 & -\frac{72E_0I}{L^5} & \frac{36E_0I}{L^4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{144E_0I}{L^6} & -\frac{72E_0I}{L^5} & 0 & \frac{144E_0I}{L^6} & -\frac{72E_0I}{L^5} \\ 0 & -\frac{72E_0I}{L^5} & -\frac{36E_0I}{L^4} & 0 & \frac{72E_0I}{L^5} & \frac{36E_0I}{L^4} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$