روش زيرفضاي يك‌بعدي اصلاح شده در تحليل ديناميكي غيرخطي

رضا عطارنژاد*[۱] و زهرا پاچناري[۲]
[۱] دانشيار دانشكده مهندسي عمران - پرديس دانشکده های فنی - دانشگاه تهران
[۲] دانشجوي دكتري دانشكده مهندسي عمران - پرديس دانشکده های فنی - دانشگاه تهران

(تاریخ دریافت ٨٦/٤/٣٠ ، تاریخ دریافت روایت اصلاح شده ٨٨/٨/٢٢، تاریخ تصویب ٨٨/١٢/١٩)

چكيده

روش اجزاي محدود سيستم‌هاي با درجات آزادي نامحدود را به مدلي با تعداد درجات آزادي محدود كه رفتار فيزيكي مشابهي دارند، تبديل مي‌كند. روش‌هاي تغيير مبنا اين تعداد درجه آزادي را به تعداد محدودتري در مختصات جديد تبديل مي‌كند. يكي از روش‌هاي تغيير مبنا با استفاده از بردارهاي ريتز-ويلسون حاصل مي‌شود كه به دليل ساده‌تر بودن استخراج و وابستگي به بار ديناميكي در بسياري موارد بر روش مرسوم تغيير مبنا يا استفاده از بردارهاي ويژه برتري دارد. همچنين از معايب بردارهاي ويژه مي‌توان به هزينه بالاي محاسباتي در سيستم‌هاي بزرگ و در نظر نگرفتن عامل بارگذاري اشاره كرد. تعداد كم بردارهاي ريتز لازم در مقايسه با بردارهاي ويژه و در نظر گرفتن توزيع مكاني بارگذاري خارجي و محتواي فركانسي غالب بارگذاري، پژوهشگران را به طرف استفاده از بردارهاي ريتز سوق داده است. روش‌هاي تغيير مبنا در مسايل غيرخطي به دليل تغييرات پياپي ماتريس‌هاي سيسستم اغلب كارايي زيادي ندارند. روش زيرفضاي يك‌بعدي تعميم‌يافته راه حل مناسبي براي تحليل مسايل غيرخطي هندسي ديناميكي با تكنيك ريتز-ويلسون ارايه مي‌كند. در اين مقاله روش زير فضاي يك‌بعدي تعميم يافته در تركيب آن با تكنيك مود- شتاب براي تحليل مسايل ديناميكي غيرخطي به كار گرفته شده است. با تكيه بر مؤلفه خطاي داخلي و روش زير فضاي يك‌بعدي تعميم‌يافته معياري اصلاحي با استفاده از تكنيک مود-شتاب براي به هنگام كردن بردارهاي پايه مورد نياز در تغييرات سختي در آناليز ديناميكي غيرخطي پيشنهاد شده است. نتايج نشان دهنده دقت و سرعت مناسب روش اصلاح شده است.

واژه‌های كليدی : روش اجزاي محدود، تحليل ديناميكي غيرخطي، روش ريتز اصلاح شده، كاهش ابعاد فضا، آناليز عددي

مقدمه

روش‌هاي كاهش ابعاد فضاي تحليل سيستم بـراي حـل مسايل ديناميكي غيرخطي به طور گسترده مورد اسـتفاده قرار گرفته‌اند. اين دسته خاص از مسايل به شكل دسـتگاه معادلات همزمان حركـت بيـان مـي‌شـوند كـه در حالـت ديناميكي غيرخطي و با در نظر گرفتن اثر ميرايـي چنـين بيان مي‌شود [۳,۲,۱]:

$$M_{n\times n}\ddot{U}_{n\times 1}(t)+C_{n\times n}\dot{U}_{n\times 1}(t)+K_{n\times n}U_{n\times 1}(t)=F_{n\times 1}(t) \quad (۱)$$

كه ماتريس‌هاي M ، C ، K به ترتيب ماتريس‌هاي جـرم، ميرايي و سختي و $F(t)$ بردار بارگـذاري ، U ، $\dot{U}$ ، $\ddot{U}$ بـه ترتيب بردار تغيير مكان، سرعت و شتاب سيستم هسـتند. براي اعمال روش كاهشـي از تبـديل مختصـات معـادلات حركت سيستم استفاده مي‌شود. مزيت ايـن روش در ايـن است كه تعداد معادلات از n معادله به m معادلـه كـاهش يافته كه باعث سرعت بيشتر تحليل و صرفه‌جويي در زمان تحليل مي‌شود. بدين منظـور از تبـديل بـردار تغييرمكـان $U_{n\times 1}(t)$ ، به شكل تركيب خطي از تغيير مكان‌هاي تعمـيم يافته $Y_{m\times 1}(t)$ بهره مي‌گيريم:

$$U_{n\times 1}(t)=\Psi_{n\times m}Y_{m\times 1}(t) \quad (۲)$$

در نتيجه با پـيش ضـرب Ψ^T در رابطـه (۱) و اسـتفاده از رابطه (۲) در آن خواهيم داشت:

$$\Psi^T M\Psi\ddot{Y}(t)+\Psi^T C\Psi\dot{Y}(t)+\Psi^T K\Psi Y(t)=\Psi^T F(t) \quad (۳)$$

كه شرايط اوليه تغييرمكان و سرعت با فرض تعامد بردار Ψ نسبت به ماتريس جرم عبارتند از:

$$Y(0)=\Psi^T MU_0;\dot{Y}(0)=\Psi^T M\dot{U}_0 \quad (٤)$$

در نتيجه خواهيم داشت:

$$M^*\ddot{Y}(t)+C^*\dot{Y}(t)+K^*Y(t)=F^*(t) \quad (۵)$$

كه مـاتريس‌هـاي تغييريافتـه (كاهشـي) جـرم، ميرايـي و سختي عبارتند از:

$$M^*=\Psi^T M\Psi, C^*=\Psi^T C\Psi, K^*=\Psi^T K\Psi \quad (٦)$$

انتخاب بردارهاي پايه Ψ مناسب بـه معنـاي حـدس و تخمين مناسب پاسخ مورد انتظار سيستم است. بردارهـاي ويژه و بردارهاي ريتز-ويلسون دو دسـته اصـلي بردارهـاي پايه هستند. در روش بردارهاي ويژه ماتريس‌هاي ميرايي و سختي كاهش‌يافته C^* و K^* قطري هستند و مـاتريس جرم كاهش‌يافته M^* نيز ماتريس قطري واحد اسـت [۲].

* نويسنده مسئول : تلفن : ٦١١١٢٢٢٥ ، فاكس : ٦٦٤٠٣٨٠٨ ، Eamil: rattar@ut.ac.ir

بردارهاي ويژه به دليل هزينه بالاي محاسباتي در سيستم‌هاي بزرگ به خصوص در حالت غيرخطي و در نظر نگرفتن عامل بارگذاري بهترين انتخاب نيستند [۴]، چون گاهي در تحليل، بردارهاي ويژه‌اي دخالت داده مي‌شوند كه به دليل تعامد بر بردار بارگذاري در تحليل نقشي ندارند و يا گاهي برخي مودهاي ارتعاشي به علت واقع شدن در محدوده قطع مودها، حذف مي‌شوند و حال آنكه به دليل نزديكي با فركانس بارگذاري نقش مؤثري در پاسخ سيستم دارند [۶,۵]. بنابراين از بردارهاي ريتز[۱] كه ناشي از توزيع مكاني بارگذاري خارجي است و از محتواي فركانسي غالب بارگذاري تأثير مي‌پذيرد، استفاده مي‌شود. در اين روش كليه بردارهاي ريتز ايجادشده در پاسخ دخالت دارند و به وسيله سيستم تحريك مي‌شوند، همچنين از حذف بردارهايي كه فركانس آنها به فركانس بارگذاري نزديك است، جلوگيري مي‌شود. در روش ريتز، ماتريس‌هاي ميرايي C^* و سختي K^* بر خلاف روش بردار ويژه قطري نيستند، ولي ماتريس جرم M^* همچنان قطري واحد است. اين مسئله جديد شامل m معادله وابسته است كه حل آن در مقايسه با n معادله نخست حجم عملياتي بسيار كمتري دارد [۶,۵].

هنگام تفكيك اين معادلات در روش ريتز خطاهايي ايجاد مي‌شود كه در روش زيرفضاي يك‌بعدي تعميم يافته با الگوريتم نيومارك اين خطاها محاسبه شده و در نهايت با افزودن اين خطاها به پاسخ سيستم پاسخ دقيق به دست آيد [۷]. در اين مقاله براي محاسبه خطاها از الگوريتم مود-شتاب به جاي الگوريتم نيومارك استفاده مي‌شود كه مزيت آن بر روش قبل اين است كه زمان انجام تحليل كاهش مي‌يابد و پاسخ‌ها دقيق‌تر مي‌شوند [۸]. در تحليل سازه تحت باري كه فركانس آن در مقايسه با چند فركانس طبيعي اول سازه بزرگ است، ديگر بردارهاي ويلسون كارآيي لازم را ندارند. بنابراين بايد از يكسري بردارهاي ريتز ديگر همراه آنها استفاده كرد [۴].

روش مود-شتاب[۲]

اگر از بردارهاي ويژه X براي حل معادله (۵) استفاده شود، به جاي حل m معادله، مي‌توان l معادله را حل كرد و با تركيب اثر آنها جواب سيستم را به دست آورد [۹,۸]:

$$Y_{m\times1}(t) = X_{m\times l}\,y_{l\times1}(t) \quad (۷)$$

$$\ddot{y}_i(t) + \overline{C}^*\dot{y}_i(t) + \overline{K}^*y_i(t) = .\overline{F}_i(t) \quad (۸)$$

كه $\overline{C}^* = X^TC^*X$ ماتريس ميرايي و $\overline{K}^* = X^TK^*X$ ماتريس سختي و $\overline{F}_i(t) = X_i^{\,T}F^*(t)$ بردار بارگذاري است.

$$Y(t) = \sum_{i=1}^{\ell} X_i y_i(t);\ \ell < m \quad (۹)$$

در روش مود-شتاب با فرض ميرايي متناسب (از رابطه (۱۰)) از رابطه (۸) مقدار $y_i(t)$ حساب مي‌شود.

$$\Psi_i^T C \Psi_j = 2\omega_i\xi_i\delta_{ij} \quad (۱۰)$$

$$y_i(t) = \frac{X_i^{\,T}F(t)}{\omega_i^2} - \left(\frac{2\xi_i}{\omega_i}\right)\dot{y}_i(t) - \left(\frac{1}{\omega_i^2}\right)\ddot{y}_i(t) \quad (۱۱)$$

با جايگذاري رابطه (۱۱) در رابطه (۹)، $Y(t)$ چنين به دست مي‌آيد:

$$Y(t) = \sum_{i=1}^{\ell} X_i\left[\frac{1}{\omega_i^2}\overline{F}_i(t) - \left(\frac{2\xi_i}{\omega_i}\right)\dot{y}_i(t) - \left(\frac{1}{\omega_i^2}\right)\ddot{y}_i(t)\right] \quad (۱۲)$$

در رابطه بالا جمله اول براي تمام مودها نوشته مي‌شود يا به عبارت ديگر اثر مودهاي حذف‌شده نيز وارد مي‌شود:

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{X_i}{\omega_i^2}X_i^{\,T}F(t) = K^{-1}F(t) \quad (۱۳)$$

در نهايت با جايگذاري رابطه (۱۳) در رابطه (۱۲) جواب سيستم كاهش يافته به دست مي‌آيد:

$$\ell < m << n \quad (۱۴)$$

$$Y(t) = K^{-1}F(t) - \sum_{i=1}^{\ell} X_i\left[\left(\frac{2\xi_i}{\omega_i}\right)\dot{y}_i(t) + \frac{1}{\omega_i^2}\ddot{y}_i(t)\right]$$

در اين رابطه ديده مي‌شود كه تأثير مودهاي بالاتر با توجه به رابطه وارون با توان دوم ω_i كمتر مي‌شود. چون در مودهاي بالاتر فركانس افزايش مي‌يابد، پس مي‌توان از آنها صرفنظر كرد. ولي در عبارت اول اثر آن مودهاي حذف شده نيز در نظر گرفته شده است كه اين موضوع باعث افزايش دقت حل مي‌شود [۱۰]. در نهايت با استفاده از رابطه (۳) جواب اصلي مسئله از رابطه (۲) به دست مي‌آيد.

محاسبه خطاهاي تحليل مسايل ديناميكي غيرخطي در زيرفضاي تعميم يافته

براي حل رابطه (۱) در یک زيرفضاي m بعدي (R^m) از تبديل مختصات (تصويرسازي) زير استفاده می‌شود [۷]:

$$U = \overline{U} + e = \Psi_{n\times m}Y_{m\times1} + e \quad (۱۵)$$

در این رابطه $\Psi_{n\times m}=\left[\psi_1,\psi_2,\ldots,\psi_m\right]_{n\times m}$ ماتریس متشکل از بردارهاي پایه تشکیل‌دهنده زیرفضاي m بعدي است. این بردارها تنها نسبت به بردار جرم متعامد هستند. با توجه به تعامد بردارهاي پایه نسبت به ماتریس جرم، معادله حرکت سیستم و شرایط اولیه آن در زیرفضاي m بعدي به صورت رابطه‌هاي (۳) و (٤) است.

رابطه‌هاي (۳) و (۴) با روش مود-شتاب که یک روش قابل اعتماد درسیستم‌هاي غیرخطي است، حل مي‌شوند. به این ترتیب خطاي ناشي از این تغییر مختصات با توجه به رابطه (۳) مطابق رابطه (۱۵) قابل محاسبه خواهد بود.

بر اساس الگوریتم عددي مورد استفاده (روش نیومارک)، تغییرمکان و سرعت سیستم در گام i–ام به شکل زیر بیان مي‌شود [۷]:

$$U_i=U_{i-1}+\tau\dot{U}_{i-1}+\frac{\tau^2}{4}(\ddot{U}_{i-1}+\ddot{U}_i) \qquad (۱۶)$$

$$\dot{U}_i=\dot{U}_{i-1}+\frac{\tau}{2}(\ddot{U}_{i-1}+\ddot{U}_i) \qquad (۱۷)$$

با پیش ضرب رابطه بالا در ماتریس جرم و به کارگیري رابطه (۱) این رابطه حاصل مي‌شود:

$$MU_i=MU_{i-1}+\tau M\dot{U}_{i-1}+\frac{\tau^2}{4}M\ddot{U}_i \qquad (۱۸)$$

$$+\frac{\tau^2}{4}\left(-C\dot{U}_{i-1}-KU_{i-1}+F_{i-1}\right)$$

همچنین، مشابه رابطه (۱۶) تغییر مکان سیستم در فضاي m بعدي عبارت است از:

$$Y_i=Y_{i-1}+\tau\dot{Y}_{i-1}+\frac{\tau^2}{4}\ddot{Y}_i \qquad (۱۹)$$

$$+\frac{\tau^2}{4}\left(-\tilde{C}\,\dot{Y}_{i-1}-\tilde{K}\,Y_{i-1}+\tilde{F}_{i-1}\right)$$

با استفاده از رابطه (۱۹) عبارت زیر حاصل مي‌شود :

$$MU_i-\Psi Y_i=(M-I)U_i+e_i \qquad (۲۰)$$

با پیش ضرب رابطه (۱۹) در Ψ و کاستن آن از معادله (۱۸) و با استفاده از رابطه (۱۵) پس از انجام عملیات ریاضي بردارخطاي جا به جایي و سرعت به دست مي‌آید[۱۰] :

$$\left(I+\frac{\tau^2}{4}PK\right)e_i=VU_i+\left(P'-\frac{\tau^2}{4}PK\right)e_{i-1}$$

$$-\frac{\tau^2}{4}PC\dot{e}_i+\left(\tau P'-\frac{\tau^2}{4}PC\right)\dot{e}_{i-1} \qquad (۲۱)$$

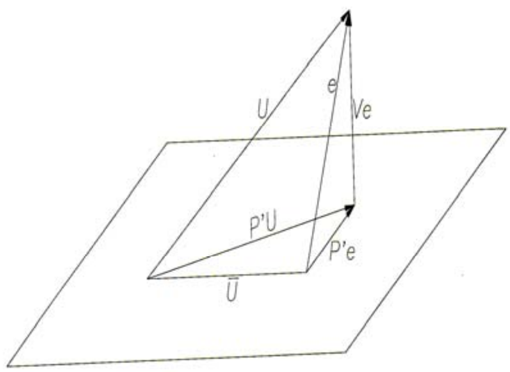
(۲۲)

$$\dot{e}_i=-\frac{\tau}{2}PKe_{i-1}+\dot{e}_{i-1}+V\Delta\ddot{U}_{i-1}-\frac{\tau}{2}PKe_i$$

مقادیر V,P,P' در رابطه هاي بالا عبارتند از :

$$P=\Psi\Psi^T,\ P'=\Psi\Psi^T M=PM,\ V=1-P'$$

(۲۳)



شکل ۱: نمایش بردار خطا و تغییرمکان سیستم در زیر فضاي سه‌بعدي.

بر اساس مباني ارائه‌شده و شکل (۱) مي‌توان نوشت [۱۰] :

$$U_i=P'U_i+VU_i \qquad (۲۴)$$

$$P'U_i=\overline{U}_i+P'e_i \qquad (۲۵)$$

$$e_i=Ve_i+P'e_i \qquad (۲۶)$$

$$Ve_i=VU_i \qquad (۲۷)$$

با انجام عملیات ریاضي روي معادلات (۲۱) تا (۲۷) رابطه‌هاي زیرحاصل مي‌شود [۷]: (e_0 بردار خطاي جا به جايي اولیه است.)

$$P'e_i=-\frac{\tau^2}{4}PKe_i+\left(P'-\frac{\tau^2}{4}PK\right)e_{i-1}$$

$$+\tau P'\dot{e}_{i-1}-\frac{\tau^2}{4}PC(\dot{e}_i+\dot{e}_{i-1}) \qquad (۲۸)$$

$$P'e_i=-\frac{\tau^2}{4}PK\left[e_i+4\sum_{k=1}^{i}ke_{i-k}-(2i+1)e_0\right] \qquad (۲۹)$$

دو زیرفضاي متعامد R_1 و R_2 که پاسخ سیستم در هر یک از آنها به ترتیب با خطاهاي e_{i1} و e_{i2} همراه است، در نظر گرفته مي‌شود:

$$e_{i1}=V_1U_i+P_1'e_{i1} \qquad (۳۰)$$

$$e_{i2} = V_2 U_i + P_2' e_{i2} \qquad (۳۱)$$

همچنین پاسخ سیستم در زیرفضاي R (حاصل مجموعه بردارهاي مولد زیرفضاهاي R_1 و R_2) خطاي e_i را به همراه خواهد داشت:

$$e_i = VU + P' e_i \qquad (۳۲)$$

با توجه به تعامد زیرفضاهاي R_1 و R_2 :

$$P' = P_1' + P_2' \qquad (۳۳)$$

$$V = V_1 + V_2 - I \qquad (۳۴)$$

با جایگذاري رابطه‌هاي (۳۳) و (۳۴) در رابطه (۲۶) و استفاده از رابطه‌هاي (۲۴) و (۲۵) و انجام عملیات ریاضي مي‌توان نوشت [۱۰]:

$$\overline{U}_i = \overline{U}_{i1} + \overline{U}_{i2} - \left[P' e_i - (P_1' e_{i1} + P_2' e_{i2}) \right] \qquad (۳۵)$$

در صورتي که در معادله (۳۵) رابطه زیر برقرار باشد، پاسخ سیستم در زیرفضاي مادر R با مجموع پاسخ سیستم در زیرفضاهاي جزیي R_1 و R_2 برابر است.

$$P' e_i = P_1' e_{i1} + P_2' e_{i2} \qquad (۳۶)$$

اگر بحث بالا به زیرفضاهاي متعامد یک‌بعدي تعمیم داده شود، نتیجه زیر به دست مي‌آید [۱۰] :

$$\overline{U}_i = \overline{U}_{i1} + \overline{U}_{i2} + \cdots + \overline{U}_{im} \qquad (۳۷)$$

شرط لازم و کافي براي برقراري رابطه (۳۷) این است که :

$$P' e_i = P_1' e_{i1} + P_2' e_{i2} + \cdots + P_m' e_{im} \qquad (۳۸)$$

این موضوع به معني جدا سازي[۳] معادلات تعادل دینامیکي همزمان سیستم است؛ بدین مفهوم که اگر سیستم واقعي توسط بردارهاي ریتز به یک سیستم تعمیم‌یافته تبدیل شود، بدون آنکه $P' e_i = 0$ باشد، معادلات تعادل سیستم از یکدیگر گسسته مي‌شوند.

فرمول‌بندي روش تحلیل در حالت دینامیکي غیرخطي

مؤلفه داخل زیرفضاي بردار خطا براي یک گام زماني دلخواه بر اساس رابطه‌هاي (۲۸) و (۲۹) نوشته مي‌شود [۱۰] : (براي سهولت موقعیت i ، حالت ۱ و موقعیت i-1 حالت صفر در نظر گرفته شده است.)

$$P' e_1 = -\frac{\tau^2}{4} P(K_1 e_1 + K_0 e_0) - \frac{\tau}{2} PC(e_1 - e_0) \qquad (۳۹)$$

پاسخ واقعي دستگاه به این ترتیب است:

$$U_1 = \bar{u}_1 \psi_1 + \bar{u}_2 \psi_2 + \bar{u}_3 \psi_3 + \ldots + \bar{u}_n \psi_n \qquad (۴۰)$$

چنانچه تحلیل یک سیستم n بعدي، در زیرفضاي یک‌بعدي R_1 (ایجاد شده توسط بردار پایه ψ_1) در نظر گرفته شود، روابط زیر در پایان گام مورد بررسي برقرار هستند [۷] :

$$U_1 = (\bar{u}_{11} + a_{11})\psi_1 + a_{21}\psi_2 + \ldots + a_{n1}\psi_n \qquad (۴۱)$$

$$\overline{U}_{11} = \bar{u}_{11} \psi_1 \qquad (۴۲)$$

$$e_{11} = a_{11} \psi_1 + a_{21} \psi_2 + a_{31} \psi_3 + \cdots + a_{n1} \psi_n \qquad (۴۳)$$

$$P' e_{11} = a_{11} \psi_1 \qquad (٤٤)$$

$$Ve_{11} = a_{21} \psi_2 + a_{31} \psi_3 + \cdots + a_n \psi_n \qquad (۴۵)$$

در رابطه‌های بالا U_1 پاسخ دقیق سیستم، $\overline{U}_{11}$ پاسخ سیستم در زیرفضاي یک‌بعدي، e_{11} بردار خطاي تحلیل سیستم در زیرفضاي یک‌بعدي و $P' e_{11}$ و Ve_{11} به ترتیب مؤلفه‌هاي بردار خطاي داخل زیرفضا و عمود بر زیرفضاي تحلیل بوده و تمام این متغیرها مربوط به تغییر مکان سیستم در پایان گام مورد نظرند. درباره خطاي ناشي از تصویرسازي شرایط اولیه گام زماني در زیرفضاي تحلیل، بردار خطا تنها مؤلفه عمود بر زیرفضاي تحلیل خواهد داشت [۷] : $(a_{110} = 0)$

$$e_{10} = Ve_{10} = a_{210}\psi_2 + a_{310}\psi_3 + \cdots + a_{n10}\psi_n \qquad (۴۶)$$

با جایگزیني رابطه‌هاي (۴۳) و (۴۴) در رابطه (۳۹) مي‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} a_{11}\psi_1 = &-\frac{\tau^2}{4}\psi_1\psi_1^T K_1 (a_{11}\psi_1 + \ldots + a_{11}\psi_n) \\ &-\frac{\tau^2}{4}\psi_1\psi_1^T K_0 (a_{110}\psi_2 + \ldots + a_{n10}\psi_n) \\ &-\frac{\tau^2}{4}\psi_1\psi_1^T C (a_{11}\psi_1 + \ldots + a_{n1}\psi_n) \\ &-\frac{\tau^2}{4}\psi_1\psi_1^T C (-a_{210}\psi_2 - \ldots - a_{n10}\psi_n) \end{aligned} \qquad (٤٧)$$

با ساده‌سازي و انجام عملیات ریاضي براي تمام زیرفضاها مي‌توان نوشت [۷] :

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \bar{u}_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{u}_{11} \\ \bar{u}_{12} \\ \vdots \\ \vdots \\ \bar{u}_{1m} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \kappa_{12}^{nl1} & \kappa_{13}^{nl1} & \cdots & \kappa_{1m}^{nl1} \\ \kappa_{21}^{nl2} & 0 & \kappa_{23}^{nl2} & \cdots & \kappa_{2m}^{nl2} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \kappa_{m1}^{nlm} & \kappa_{m2}^{nlm} & \kappa_{m3}^{nlm} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \bar{u}_m \end{Bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & \bar{\kappa}_{12}^{nl1} & \bar{\kappa}_{13}^{nl1} & \cdots & \bar{\kappa}_{1m}^{nl1} \\ \bar{\kappa}_{21}^{nl2} & 0 & \bar{\kappa}_{23}^{nl2} & \cdots & \bar{\kappa}_{2m}^{nl2} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \bar{\kappa}_{m1}^{nlm} & \bar{\kappa}_{m2}^{nlm} & \bar{\kappa}_{m3}^{nlm} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_{01} \\ \bar{u}_{02} \\ \vdots \\ \vdots \\ \bar{u}_{0m} \end{Bmatrix}$$

(۴۸)

پس از بازنویسی رابطه (۴۸)، این رابطه‌ها به دست می‌آید:

$$\bar{U}_1 = \bar{\bar{\bar{U}}}_1 + \Lambda_{nl}\bar{U}_1 + \bar{\Lambda}_{nl}\bar{U}_0 \qquad (۴۹)$$

$$(1-\Lambda_{nl})\bar{U}_1 = \bar{\bar{\bar{U}}}_1 + \bar{\Lambda}_{nl}\bar{U}_0 \qquad (۵۰)$$

ماتریس سختی Λ_{nl} و $\bar{\Lambda}_{nl}$ رابطه‌هاي بالا به این ترتیب تعریف می‌شود:

$$\kappa_{ij}^{nli} = \frac{-\frac{\tau^2}{4}\psi_i^T K_0 \psi_j - \frac{\tau}{2}\psi_i^T C \psi_j}{1+\frac{\tau^2}{4}\psi_i^T K_1 \psi_i + \frac{\tau}{2}\psi_i^T C \psi_i} \quad i \neq j$$

$$\kappa_{ij}^{nli} = 0 \quad i = j \qquad (۵۱)$$

$$\bar{\kappa}_{ij}^{nli} = \frac{-\frac{\tau^2}{4}\psi_i^T K_0 \psi_j + \frac{\tau}{2}\psi_i^T C \psi_j}{1+\frac{\tau^2}{4}\psi_i^T K_1 \psi_i + \frac{\tau}{2}\psi_i^T C \psi_i} \quad i \neq j$$

$$\bar{\kappa}_{ij}^{nli} = 0 \quad i = j \qquad (۵۲)$$

در اینجا $\bar{\bar{\bar{U}}}_1$ ، حاوي پاسخ‌هاي سیستم کاهش‌یافته با صرف‌نظر کردن از عناصر غیرقطري ماتریس‌هاي سختي و میرایی است و $\bar{U}_1$ پاسخ سیستم کاهش‌یافته با در نظر گرفتن تأثیر عنصرهای غیرقطري ماتریس‌هاي سختي و میرایي است.

(۵۳)

$$\bar{U}_1^{(n)} = \bar{\bar{\bar{U}}}_1 + \left(1+\Lambda+\Lambda^2+\cdots+\Lambda^{n-1}\right)\left(\Lambda\bar{\bar{\bar{U}}}_1 + \bar{\Lambda}\bar{U}_0\right)$$

پایداري و همگرایی روش[٤]

پایداری و همگرایی در روش‌های دینامیکی اهمیت بسیاری دارد که به طور مشروح در ادبیات فنی مورد مطالعه قرار گرفته است [۱۱,۲]. در ادامه پایداری و همگرایی روش ریتز اصلاحي به هنگام سازي شده با تکنیك مود-شتاب بررسی می‌شود. برای بررسي وضعیت پایداري و همگرایي روش، بر اساس رابطه‌های رشته هندسي و رابطه (۵۰) و با فرض $-1<\Lambda<I$، مي‌توان نوشت [۷]:

$$(1-\Lambda)\bar{U}_1^{(n)} = \bar{\bar{\bar{U}}}_1 + \bar{\Lambda}\bar{U}_0 \qquad (۵۴)$$

بنابراین با توجه به فرض $-1<\Lambda<1$ روش تکرار ارایه‌شده پایدار است؛ اگر و تنها اگر شعاع طیفي ماتریس سختی Λ کوچک‌تر از یک باشد $(\rho(\Lambda)<1)$:

$$\rho(\Lambda) = \max|\lambda_i|, i=1,2,\cdots,n \qquad (۵۵)$$

با توجه به تعریف ماتریس Λ مي‌توان نوشت:

$$\Lambda = \tilde{\Phi}^{-1}\Delta\tilde{\Phi} \qquad (۵۶)$$

$$\Lambda^n = \tilde{\Phi}^{-1}\Delta^n\tilde{\Phi} \qquad (۵۷)$$

در این رابطه $\tilde{\Phi}$ ماتریس تشکیل شده از بردارهاي ویژه یا ریتز و Δ ماتریس قطري در بر گیرنده مقادیر ویژه ماتریس سختی Λ است.

$$\rho(\Lambda)<1 : n \to \infty \Rightarrow \Delta^n \to 0 \qquad (۵۸)$$

معادله (۵۳) در معادله (۵۰) جایگذاري مي‌شود و برای برقراري تعادل در دو طرف معادله (۵۰) مقدار خطاي برشی σ_n چنین ظاهر مي‌شود[۷]:

$$\sigma_n = (I-\Lambda)[(I+\Lambda+\Lambda^2+\cdots+\Lambda^{n-1})(\Lambda\bar{\bar{\bar{U}}}_1 + \bar{\Lambda}\bar{U}_0) + \bar{\bar{\bar{U}}}_1] - [\bar{\bar{\bar{U}}}_1 + \bar{\Lambda}\bar{U}_0] \qquad (۵۹)$$

با انجام ضرب ماتریسي و جداسازي بخشي از مؤلفه‌هاي معادله بالا، رابطه زیر حاصل مي‌شود:

$$\sigma_n = -\Lambda^n\left(\Lambda\bar{\bar{\bar{U}}}_1 + \bar{\Lambda}\bar{U}_0\right) \qquad (۶۰)$$

با جایگذاري معادله (۵۷) در معادله (۶۰) مي‌توان نوشت[۱۰] :

$$\sigma_n = -\tilde{\Phi}^{-1}\Delta^n\tilde{\Phi}\left(\Lambda\bar{\bar{\bar{U}}}_1 + \bar{\Lambda}\bar{U}_0\right) \qquad (۶۱)$$

با توجه به برقراری شرط پایداري $(\rho(\Lambda)<1)$ می‌توان نتیجه گرفت:

$$n \to \infty \Rightarrow \Delta^n \to 0 \qquad (۶۲)$$

$$\Rightarrow \sigma_n \to 0 \Rightarrow \bar{U}_1^{(n)} \to \bar{U}_1$$

مرتبه بردار خطا ۲ است [۷]. روشن است هر چه مقدار $\rho(\Lambda)$ کوچک‌تر باشد، سرعت همگرایي روش تکرار

بالاتر خواهد بود.

به‌هنگام‌سازي زيرفضاي تعميم يافته

ضرورت تغيير زيرفضاي تحليل با توجه به ميزان تغييرات ماتريس سختي مي‌تواند حتي در هر گام زماني تحليل اجتناب‌ناپذير شود، بنابراين هزينه محاسباتي ناشي از اين موضوع كارآيي روش تحليل ديناميكي در زيرفضاي تعميم يافته را به شدت تحت تأثير قرار مي‌دهد[۱۲،۸] . همچنين عامل جديد خطا، ناشي از تغيير بردارهاي پايه و ناسازگاري[5] بين بردارهاي مولد زيرفضاي قبلي و جديد براي تصويرسازي تغيير مكان، سرعت و شتاب اوليه در شروع گام زماني جديد، به طور پيوسته باعث افزايش و رشد خطاي ناشي از نبود تعادل سيستم شده و حتي مي‌تواند باعث ناپايداري شود. سختي سيستم و پاسخ (تغيير مكان) سيستم، دو عامل اساسي مؤثر بر به‌هنگام‌سازي هستند كه اين دو عامل مي‌توانند در عامل انرژي تجلي كنند[۷]:

$$\tilde{\Pi}_0 = \frac{1}{2}\bar{Y}_i^T \tilde{K}_0 \bar{Y}_i \qquad (۶۳)$$

$$\tilde{\Pi}_i = \frac{1}{2}\bar{Y}_i^T \tilde{K}_i \bar{Y}_i \qquad (۶۴)$$

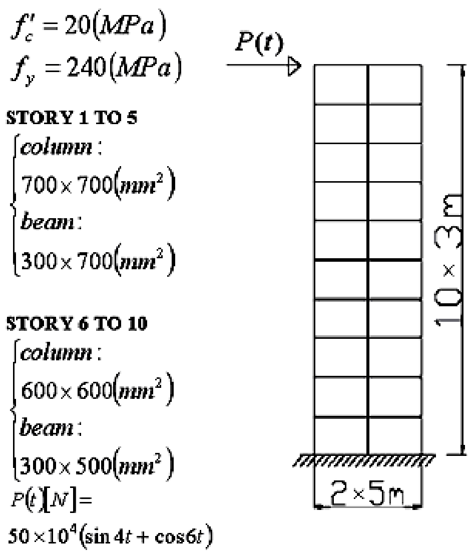
كه $\tilde{\Pi}_0$ انرژي پتانسيل داخلي تعميم‌يافته سيستم در موقعيت توليد بردارهاي پايه مولد زيرفضاي تعميم‌يافته و $\tilde{\Pi}_i$ انرژي پتانسيل داخلي تعميم‌يافته سيستم در موقعيت كنونی تحليل (گام i–ام) ، $\tilde{K}_0$ ماتريس سختي تعميم‌يافته سيستم در موقعيت توليد بردارهاي پايه مولد زيرفضاي تعميم‌يافته و $\tilde{K}_i$ ماتريس سختي تعميم‌يافته سيستم در موقعيت فعلي (گام i–ام) ، $\bar{Y}_i$ بردار پاسخ تعميم يافته سيستم در موقعيت فعلي (گام i-ام) هستند.

$$Abs\left(1-\frac{\tilde{\Pi}_0}{\tilde{\Pi}_i}\right)=\varepsilon_i \qquad (۶۵)$$

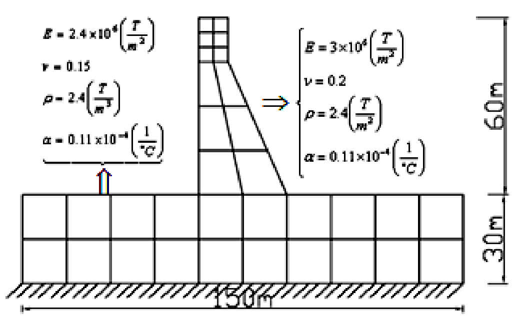
در صورتي كه ε_i از مقدار مجاز تعيين‌شده بيشتر شود، به‌هنگام‌سازي زيرفضا ضروري می‌شود و بردارهاي پايه مولد زيرفضا بايد دوباره محاسبه شوند(مقدار مجاز حدود ۰/۰۵ است).

مثال‌ها

مطابق الگوريتم ارايه‌شده در اين مقاله كه در پيوست آمده است، برنامه‌ای به زبان FORTRAN كه يكی از زبان‌هاي برنامه‌نويسي پر كاربرد در مهندسي است، نوشته شده است و مثال‌هايي با آن اجرا شده است. در مثال اول قاب دو دهانه ۱۰ طبقه با بارگذاري سينوسي در طبقه آخر و در مثال دوم سدي بتنی با بار ناشي از ثقل، هيدرو استاتيك و هيدرو ديناميك قرار گرفته است. در اين مثال‌ها تغييرشكل‌ها بزرگ (هندسه غير خطی) فرض شده و رفتار مصالح ارتجاعی در نظر گرفته شده است. ميرايي نيز ۵ درصد فرض می‌شود.



شكل ۲ : مشخصات قاب دو دهانه.



شكل ۳ : مشخصات سد و پيرامون آن.

براي به دست آوردن جواب مبنا در يكي از نقاط بحراني (درمثال اول نقطه اعمال بار و در مثال دوم محل تاج سد)، از روش نيومارك با شتاب ميانگين استفاده شده است. خطاهاي حاصل از نتايج تحليل مسئله در روش ريتز اصلاحي به‌هنگام‌سازي‌شده با تكنيك مود-شتاب با ابعاد زيرفضاي متفاوت در جدول (۱) و شكل (۴) خلاصه شده است. مقادير خطاي مربوط به معيار بارگذاري و معيار جرم براي قطع بردارهاي ريتز طبق رابطه‌هاي (۶۶) و (۶۷) و

مقدار خطاي تغييرمكان در نقطه اعمال بار در مثال اول و تاج سد در مثال دوم برحسب رابطه (۶۸) به دست مي‌آيد كه در اين رابطه N تعداد گام‌هاي زماني تحليل است.

$$\varepsilon_f = \frac{\left| f^T e_f \right|}{f^T f_m} \qquad \text{(٦٦- الف)}$$

$$f_m = \sum_{i=1}^{m} \left(f^T M \psi_i \right) \psi_i \qquad \text{(٦۶- ب)}$$

$$e_f = f - f_m \qquad \text{(٦۶- ج)}$$

$$\varepsilon_M = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{m} \left(\overline{M}^T \psi_i \right)^2}{\sum_{i=1}^{n} \overline{M}_i} \qquad \text{(٦٧- الف)}$$

$$\overline{M}_i = \sum_{j=1}^{n} M_{ij} \qquad \text{(٦٧- ب)}$$

$$\varepsilon_{disp} = \left[\left(\sum_{i=1}^{N} \left| \frac{U_i - \overline{U}_i}{U_i} \right| \right) / N \right] \times 100 \qquad \text{(۶۸)}$$

خطــاي تغييرمكـــان در روش‌هـــاي ريتـــز اصـــلاحي به‌هنگام‌سازي‌شده با تكنيك مود-شـتاب و ريتـز اصـلاحي به‌هنگام‌سازي‌نشده با تكنيک مود-شتاب و ريتـز اصـلاحي به‌هنگام‌سازي‌شده با تكنيك نيومارك بر حسب ابعـاد زيـر فضا در جـدول (۲) و شـكل (۵) نشـان داده شـده اسـت. كــارآيي الگـــوريتم تحليـــل در زيرفضـــاهاي يـــك‌بعـــدي تعميم‌يافته به‌هنگام‌سـازي‌شـده در روش مـود-شـتاب بـر حسب تعداد بردارهاي ريتز مولد زيرفضاي تحليل در شكل (۶) ارايه شده اسـت كـه كـاهش زمـان انجـام محاسـبات مشهود است. در اين شكل نسبت مدت زمان تحليل روش ريتز اصلاحي به‌هنگام‌سازي‌شده با تكنيك مود-شـتاب بـه مدت زمان تحليل در روش نيومارك برحسب ابعاد زير فضا نشان داده شده است. در اين مثال‌ها اثـر پديـده تشـديد براي محاسبه بردارهاي ريتز لازم در نظر گرفته شده است.

جدول ۱ :مقايسه خطاهاي مختلف بر حسب ابعاد زير فضا در روش ريتز اصلاحي به‌هنگام‌شده (مود- شتاب).

ابعاد زیر فضا	خطای معیار تغییر مکان٪	خطای معیار بارگذاری٪	خطای معیار جرم٪
۸	۹٫۲۳	۱۵٫۶۱	۷٫۸۸
۹	۳٫۷۸	۹٫۱۷	۵٫۹۷
۱۰	۱٫۷۸	۵٫۲۹	۴٫۳۳
۱۱	۰٫۲۹	۱٫۲۷	۲٫۷۸
۱۲	۰٫۰۷	۰٫۲۷	۲٫۱۴
۱۳	۰٫۰۳	۰٫۱۱	۱٫۸۵
۱۴	۰٫۰۱	۰٫۰۵	۱٫۴۱
۱۵	۰٫۰۰۴	۰	۱٫۱۷
۱۶	۰٫۰۰۳	۰	۰٫۹۷
۱۸	۰٫۰۰۲	۰	۰٫۸۲
۲۰	۰٫۰۰۲	۰	۰٫۷
۲۲	۰٫۰۰۲	۰	۰٫۷

الف-مثال ۱

ابعاد زیر فضا	خطای معیار تغییر مکان٪	خطای معیار بارگذاری٪	خطای معیار جرم٪
۵	۱۰٫۲۱	۱۴٫۲۱	۷٫۵۹
۶	۷٫۲۸	۱۰٫۴۵	۵٫۳۳
۷	۴٫۷۳	۷٫۱۲	۳٫۲۴
۸	۲٫۷۱	۴٫۶۴	۱٫۴۹
۹	۰٫۹۴	۲٫۳۵	۰٫۸۵
۱۰	۰٫۴۱	۰٫۴۷	۰٫۴۹
۱۱	۰٫۱۹	۰٫۰۹	۰٫۲۳
۱۲	۰٫۱	۰٫۰۳	۰٫۱۳
۱۳	۰٫۰۸	۰	۰٫۱
۱۴	۰٫۰۶	۰	۰٫۰۸
۱۵	۰٫۰۴	۰	۰٫۰۷
۱۶	۰٫۰۴	۰	۰٫۰۷

ب-مثال ۲

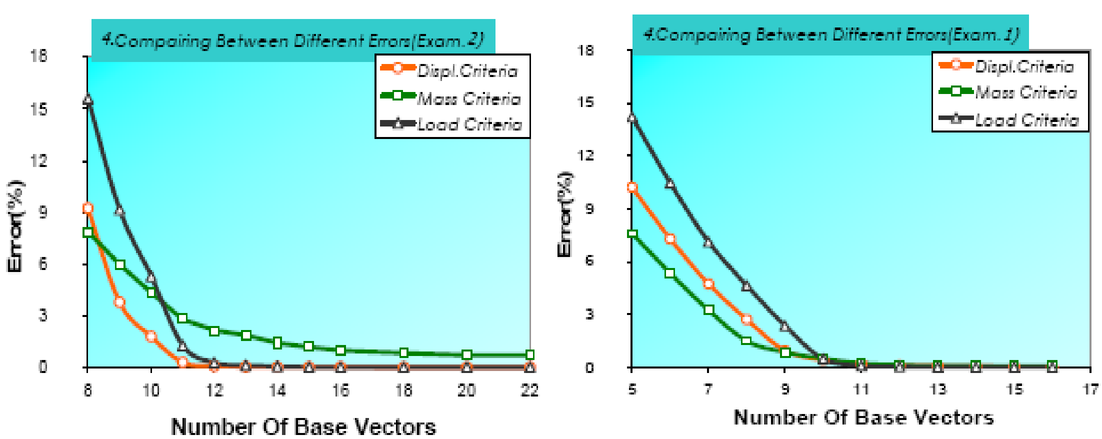
جدول ۲ : میزان خطاي تغییرمکان در روش ریتز اصلاحي به‌هنگام‌سازي‌شده با تکنیک مود-شتاب و روش ریتز اصلاحي به‌هنگام‌سازي‌نشده با تکنیک مود-شتاب و روش ریتز به‌هنگام‌شده با تکنیک نیومارك (روش پیشنهادي مرجع [7]) بر حسب ابعاد زیر فضا.

ابعاد زیرفضا	روش پیشنهادی به هنگام شده	روش پیشنهادی به هنگام نشده	روش پیشنهادی مرجع ۷
۸	۹.۲۳	۱۶.۱۱	۱۸.۲۳
۹	۳.۷۸	۹.۵۲	۱۴.۵۶
۱۰	۱.۷۸	۵.۹۳	۱۰.۴۱
۱۱	۰.۲۹	۳.۱۲	۷.۴۵
۱۲	۰.۰۷	۱.۵۶	۵.۱۱
۱۳	۰.۰۳	۰.۹۷	۴.۰۴
۱۴	۰.۰۱	۰.۷۵	۳.۱۷
۱۵	۰.۰۰۴	۰.۵۷	۲.۲۵
۱۶	۰.۰۰۳	۰.۴۲	۱.۴۶
۱۸	۰.۰۰۲	۰.۲۹	۰.۸۴
۲۰	۰.۰۰۲	۰.۱۹	۰.۷۱
۲۲	۰.۰۰۲	۰.۱۳	۰.۵۹
۲۴	–	۰.۰۷	۰.۴۸
۲۶	–	۰.۰۲	۰.۳۹

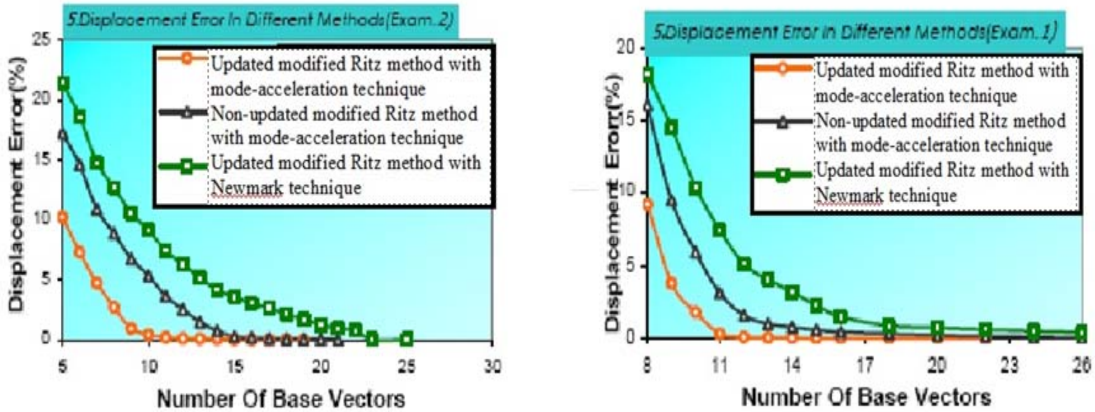
الف-مثال ۱

ابعاد زیرفضا	روش پیشنهادی به هنگام شده	روش پیشنهادی به هنگام نشده	روش پیشنهادی مرجع ۷
۵	۱۰.۲۱	۱۷.۲۶	۲۱.۴۵
۶	۷.۲۸	۱۴.۶۲	۱۸.۶۵
۷	۴.۷۳	۱۰.۸۹	۱۴.۸
۸	۲.۷۱	۸.۸۵	۱۲.۷۳
۹	۰.۹۴	۶.۷۴	۱۰.۵۶
۱۰	۰.۴۱	۵.۳۳	۹.۱۲
۱۱	۰.۱۹	۳.۶۴	۷.۴۲
۱۲	۰.۱	۲.۵۲	۶.۲۸
۱۳	۰.۰۸	۱.۴۸	۵.۱۷
۱۴	۰.۰۶	۰.۷۴	۴.۱۵
۱۵	۰.۰۴	۰.۲۵	۳.۵۵
۱۶	۰.۰۴	۰.۱۷	۳.۰۱
۱۷	۰.۰۲	۰.۰۹	۲.۶۵
۱۸	۰.۰۱	۰.۰۷	۲.۱۲
۱۹	–	۰.۰۵	۱.۶۹
۲۰	–	۰.۰۳	۱.۲۵
۲۱	–	۰.۰۱	۰.۹۴
۲۲	–	–	۰.۷۶

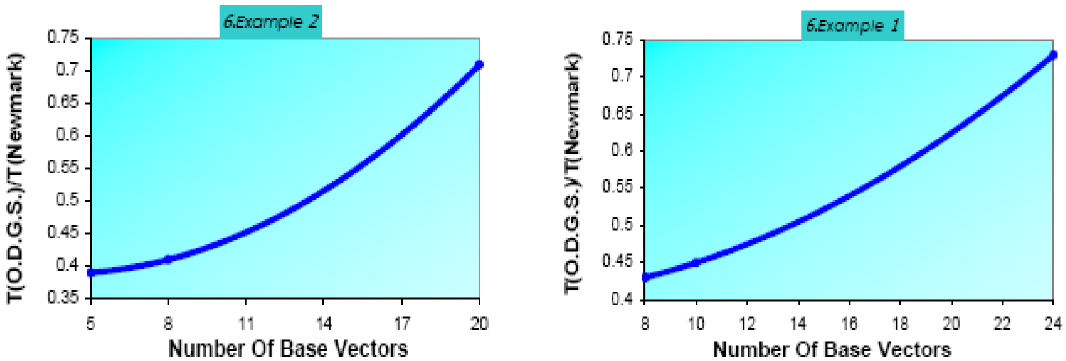
ب-مثال ۲



شکل ۴ : میزان انواع خطاها برحسب ابعاد زیرفضا در روش ریتز اصلاحي به‌هنگام‌شده با تکنیك مود-شتاب.



شکل ۵ : ميزان خطاي تغييرمكان بر حسب ابعاد زيرفضا.



شکل ۶ : نسبت مدت زمان تحليل روش ريتز اصلاحي به‌هنگام‌شده با تكنيك مود-شتاب به مدت زمان تحليل روش ريتز اصلاحي به‌هنگام‌شده با تکنیک نيومارك برحسب ابعاد زيرفضا.

نتايج

۱- با روش ارايه‌شده در اين مقاله، در تحليل مسايل بزرگ با استفاده از تحليل ديناميكي غيرخطي در زيرفضاي يك‌بعدي تعميم‌يافته با تکنیک مود-شتاب، علاوه بر اينكه ميزان محاسبات كاهش يافته و اثر مودهاي بالاتر هم ملحوظ شده با تعداد بردارهاي پايه كمتري نسبت به روش زيرفضاي يك‌بعدي تعميم يافته با تكنيک نيومارك به جواب‌هاي يكسان دست يافته‌ايم. با استفاده از اين روش، زمان انجام محاسبات به طور فاحش كم مي‌شود(شكل۶)، كه اين موضوع در مسايل بزرگ‌تر منجر به كاهش چشمگير هزينه‌هاي محاسباتي مى‌شود.

۲- خطاي حاصل از تحليل سيستم به روش زيرفضاهاي تعميم‌يافته يک‌بعدي به‌هنگام‌سازي‌شده و روش به‌هنگام‌نشده با تكنيک مود-شتاب با افزايش ابعاد زيرفضا كاهش مي‌يابد (اشكال ۴ و ۵ و جداول ۱ و ۲).

۳- كارايي روش تحليل در زيرفضاهاي تعميم‌يافته يک‌بعدي به‌هنگام‌شده نسبت به روش به‌هنگام‌نشده با تكنيک مود-شتاب، با افزايش ابعاد سيستم افزايش مي‌يابد. افزايش كارايي در مورد سيستم‌هاي غيرخطي به علت ضرورت استفاده از روش تكرار و به‌هنگام‌سازي زيرفضاهاي تعميم‌يافته بسيار محسوس‌تر است. در مواردي كه انجام تحليل غيرخطي با روش به‌هنگام‌سازي‌نشده به يكي از دليل‌هاي بالا توجيه‌ناپذير و غيرعملي مى‌شود، استفاده از روش به‌هنگام‌سازي‌شده باعث كاهش زمان تحليل مسايل غيرخطي مي‌شود و استفاده از روش كاهش ابعاد را توجيه مى‌كند.

۴- به علت كاهش مدت زمان تحليل در مسايل غيرخطي، دقت تحليل سيستم‌هاي غيرخطي را با افزايش ابعاد زيرفضاي تحليل در روش زيرفضاي تعميم‌يافته مى‌توان افزايش داد؛ به طوري كه همچنان استفاده از روش

زيرفضاي تعميم‌يافته قابل توجيه است(شكل ۴ و جدول ۱).

۵- معيار خطاي جرم نسبت به معيار خطاي بارگذاري براى قطع توليد بردارهاي پايه مناسب‌تر است.

۶- تحقيقات براي بهبود الگوريتم و افزايش دقت جواب‌ها در بارگذاري با محتواي فركانسي در دست انجام است و به زودي نسبت به انتشار آن اقدام خواهد شد.

مراجع

1 - Bathe, K. J. and Gracewcki, S. (1981),"On non-linear dynamic analysis using sub-structuring and mode superposition", Computers and Structure, Vol. 13, PP. 699-707.

2 - Bathe, K.J. (1996), Finite element procedures in engineering analysis, Printice-Hall Inc.

3 - Leger, P. and Dussanlt, S. (1992), "Non- linear seismic response analysis using vector superposition methods", Earthq. Eng. Struct. Dyn., Vol. 21, PP. 163-176.

4 - Xia, H. and Humar, J. L. (1992), "Frequency dependent Ritz vectors", Earthq. Eng. Struct. Dyn., Vol. 21, pp. 215-231.

5 - Joo, K.J. and Wilson, E.L. (1989), "Ritz vectors and generation criteria for mode superposition analysis", Erthq. Eng. Struct. Dyn., Vol. 18, pp. 149- 167.

6 - Wilson, E.L., Dikens, Y.,"Dynamic analysis by direct superposition analysis of Ritz vectors", Erthq. Eng. Struct. Dyn., Vol. 10, pp. 813-821.

7 - Heravi, Gh. And Attarnejgad, R. (2004), "Non-linear dynamic analysis by updated subspaces method", Engineering Computation, Vol. 21, No. 8.

8 - Owen, D. R. J. and Hinton, E. (1986), Finite element in plasticity: Theory and practice, 2nd Ed.

9 - Owen, D.R.J. and Hinton, E. (1999), an introduction to finite element computations.

10 - Pachenari, Z. (200٧), "Non-linear dynamic analysis by modified one dimension generalized subspaces method", Msc. Thesis, School Of Civil Eng. University Of Tehran.

11 - Bathe, K. J. and Wilson, E. L. (1973),"Stability and accuracy analysis of direct integration methods", Earthq. Eng. Struct. Dyn., Vol. 1, PP. 283-, 291.

12 - Noor, A. k. (1994),"Recent advances and applications of reduction methods", Applied Mechanics Reviews, Vol. 7, pp. 65-72.

13 - Vtku, S., Clemente, J. L. M. and Salama, M. (1985),"Errors in reduction methods", Computers and Structure, Vol. 21, pp. 1153-7.

پیوست

الگوريتم روش تحليل در روش زيرفضاي يك بعدي با استفاده از به هنگام سازي

۱- كاهش ابعاد فضاي اوليه

الف – توليد بردارهاي ريتز

$$KU_1 = f(s)$$

$$K\psi_1^* = MU_1$$

نرماليزه نمودن بردار ريتز اول نسبت به ماتريس جرم:

$$\psi_1 = \psi_1^* / \left\| \psi_1^* \right\|_M$$

$$\left\| \psi_1^* \right\|_M = \left(\psi_1^{*T} M \psi_1^* \right)^{1/2}$$

محاسبه بردارهاي ريتز بعدي: (i=2, …, m)

$$a_{i-1} = \psi_{i-1}^T MU_{i-1}$$

$$U_i = U_{i-1} - a_{i-1}\psi_{i-1}$$

$$K\psi_i^* = MU_i$$

متعامد نمودن بردار ريتز توليد شده نسبت به بردارهاي ريتز قبلي (نسبت به ماتريس جرم): (j=1,…,i-1)

$$C_j = \psi_j^T M \psi_i^{*(j)}$$

$$\psi_i^{*(j+1)} = \psi_i^{*(j)} - C_j \psi_j$$

نرماليزه نمودن بردارهاي ريتز نسبت به ماتريس جرم:

$$\psi_i = \psi_i^* / \left\| \psi_i^* \right\|_M$$

$$\left\| \psi_i^* \right\|_M = \left(\psi_i^{*T} M \psi_i^* \right)^{1/2}$$

- معيارهاي قطع توليد بردارهاي ريتز:

- o براساس بردار بارگذاري خارجي

$$\varepsilon_f = \frac{\left| f^T e_f \right|}{f^T f_m}$$

$$e_f = f - f_m$$

$$f_m = \sum_{i=1}^{m} \left(f^T M \psi_i \right) \psi_i$$

- o براساس ماتريس جرم

$$\varepsilon_M = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{m} \left(\overline{M}^T \psi_i \right)^2}{\sum_{i=1}^{n} \overline{M}_i}$$

$$\overline{M}_i = \sum_{i=1}^{n} M_{ij}$$

ب – محاسبه مشخصه‌هـاي سيسـتم در زيرفضـاي تعميم يافته

$$\Psi = \left[\psi_1, \cdots, \psi_m \right]_{n \times m}$$

$$\widetilde{M} = \Psi^T M \Psi = I$$

$$\widetilde{C}_v(i) = \psi_i^T C \psi_i \qquad i = 1 \quad to \quad m$$

$$\widetilde{K}_{0v}(i) = \psi_i^{T\,0} K_0 \psi_i \qquad i = 1 \quad to \quad m$$

$${}^0\widetilde{K} = \Psi^T K_0 \Psi$$

$$\widetilde{F}_0 = \Psi^T F_0 \qquad , \qquad \widetilde{F}_1 = \Psi^T F_1$$

$$Y_0 = \Psi^T M U_0$$

$$\dot{Y}_0 = \Psi^T M \dot{U}_0$$

$$\ddot{Y}_0 = \widetilde{F}_0 - \widetilde{C}_V \dot{Y}_0 - \widetilde{K}_V Y_0$$

ج- محاسبه ماتريس Λ_{nl0}

$$\kappa_{ij}^{nli} = \frac{-\frac{\tau^2}{4} \psi_i^T K_0 \psi_j - \frac{\tau}{2} \psi_i^T C \psi_j}{1 + \frac{\tau^2}{4} \psi_i^T K_0 \psi_i + \frac{\tau}{2} \psi_i^T C \psi_i} \qquad i \neq j$$

$$\kappa_{ij}^{nli} = 0 \quad i = j$$

د – محاسبه شعاع طيفي Λ_{nl0} (حداکثر مقدار ويژه ماتريس Λ_{nl0}) $\rho(\Lambda_{nl0}) = \left| \lambda_n \right|$

اگر $\rho \geq 1$ باشد، آنگاه $\tau = \tau / \rho$ قـرار داده شـده و از گام ج محاسبات تکرار مي شود.

۲- حل معادلات حرکت يك بعـدي بـه روش مـود-شتاب (مطابق رابطه هاي (۸) تا (۱۴))

۳- محاسبه ماتريس‌هاي Λ_{nl} و $\overline{\Lambda}_{nl}$

$$\kappa_{ij}^{nli} = \frac{-\frac{\tau^2}{4} \psi_i^T K_0 \psi_j - \frac{\tau}{2} \psi_i^T C \psi_j}{1 + \frac{\tau^2}{4} \psi_i^T K_1 \psi_i + \frac{\tau}{2} \psi_i^T C \psi_i} \qquad i \neq j$$

$$\kappa_{ij}^{nli} = 0 \quad i = j$$

$$\overline{\kappa}_{ij}^{nli} = \frac{-\frac{\tau^2}{4} \psi_i^T K_0 \psi_j + \frac{\tau}{2} \psi_i^T C \psi_j}{1 + \frac{\tau^2}{4} \psi_i^T K_1 \psi_i + \frac{\tau}{2} \psi_i^T C \psi_i} \qquad i \neq j$$

$$\overline{\kappa}_{ij}^{nli} = 0 \quad i = j$$

۴- اصلاح بردارهاي تغيير مکان و سرعت و شتاب

$$Y_1^{(0)} = \overline{\overline{Y}}_1$$

$$Y_1^{(i+1)} = \overline{\overline{Y}}_1 + \Lambda_{nl} Y_1^{(i)} + \overline{\Lambda}_{nl} Y_0$$

$$\Delta Y_1 = Y_1 - Y_0$$

$$\Delta \dot{Y}_1 = \frac{2}{\tau} \Delta Y_1 - 2 \dot{Y}_0$$

$$\ddot{Y}_1 = \widetilde{F}_1 - \widetilde{C}_V \left(\dot{Y}_0 + \Delta \dot{Y}_1 \right) - \widetilde{K}_{1V} Y_1$$

۵- انتقال پاسخ‌ها به فضاي اصلي

$$U_1 = U_0 + \Psi \, \Delta Y_1$$

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_0 + \Psi \, \Delta \dot{Y}_1$$

$$\ddot{U}_1 = \Psi \, \ddot{Y}_1$$

۶- کنترل معيار به هنگام سازي

$$\widetilde{\Pi}_0 = \frac{1}{2} Y_1^T \, {}^0\widetilde{K} Y_1$$

$$\widetilde{\Pi}_i = \frac{1}{2} Y_1^T \, {}^1\widetilde{K} Y_1$$

اگـر $\left|1-\frac{\tilde{\Pi}_0}{\tilde{\Pi}_i}\right|>\varepsilon$ بـه هنگـام سـازي بردارهـاي پايـه ضروري مي‌باشد (ε حدود ۰.۰۵ مناسب است.).

۷- تكرار مراحل تحليل جهت گامهاي زماني بعد

- در صورت ضرورت به‌هنگام سـازي، تكـرار آنـاليز از گـام (۱- الف)

- در صورت عدم ضرورت به‌هنگام سـازي، تكـرار آنـاليز از گام (۲)

واژه های انگلیسی به ترتیب استفاده در متن

1- Ritz Vectors
2 - Mode-Acceleration Method
3 - Decoupling
4 - Stability and convergence of method
5 - Incompatibility