

## تحلیل سه بعدی خم ۹۰ درجه تونل ها تحت اثر انتشار موج با استفاده از المان مرزی

محمد رضا صفری<sup>۱</sup> و اسدا.. نورزاد<sup>۲\*</sup>

<sup>۱</sup> دانش آموخته کارشناسی ارشد دانشکده مهندسی عمران - پردیس دانشکده های فنی - دانشگاه تهران

<sup>۲</sup> استادیار دانشکده مهندسی عمران - پردیس دانشکده های فنی - دانشگاه تهران

(تاریخ دریافت ۸۵/۶/۲۵، تاریخ دریافت روایت اصلاح شده ۸۷/۵/۸، تاریخ تصویب ۸۷/۹/۲۴)

### چکیده

این مقاله به تبیین روشی عددی برای تعیین پاسخ دینامیکی خم ۹۰ درجه تونل ها، با در نظر گرفتن اندرکنش تونل با محیط اطراف، در برابر گسترش امواج زلزله در حوزه زمانی می پردازد. فرض های اساسی در این مقاله رفتار خطی محیط های در نظر گرفته شده و قرارگیری تونل خمیده در عمق بسیار زیاد از سطح زمین است که در نتیجه آن تونل در محیط بی نهایت مدل می شود. شبیه سازی مسئله به دلیل وجود خم در تونل به صورت ۳ بعدی و با استفاده از روش المان مرزی انجام می شود. روش مذکور برای شبیه سازی مسائل اندر کنش خاک و سازه و گسترش امواج در محیط های بی نهایت یا نیمه بی نهایت مزیت های فراوانی دارد. در الگوریتم ارائه شده، مرزهای تونل بتنی یا فولادی و مرز محیط اطراف با استفاده از المان های حلقه مدل شده است. با توجه به نگاشت ارائه شده سطح مقطع تونل نیز می تواند به دو شکل دایره ای کامل و یا ۳/۴ دایره با دقت مناسبی مدل شود. در انتها مثالی ارائه می شود که خم ۹۰ درجه تونل با مقطع دایره ای تحت اثر انتشار موج فشاری پله ای با استفاده از الگوریتم ارائه شده تحلیل شده و ضرایب افزایش تنش در نقاط مختلف خم ارائه می شود. نتایج ارائه شده هنگامی که شعاع خم بیش از ۳۵ برابر شعاع داخلی مقطع تونل باشد به تحلیل های دو بعدی انجام شده بسیار نزدیک می شود.

**واژه های کلیدی:** تونل های خمیده، گسترش موج، روش المان مرزی، دستگاه مختصات منحنی الخط

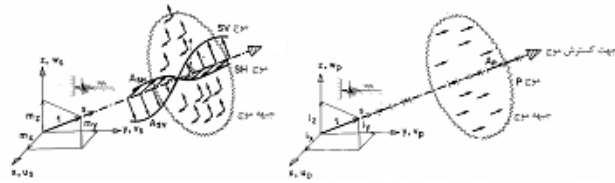
### مقدمه

دار را با فرض رفتار کرنش مسطح و اتصال کامل بین بدنه و محیط اطراف، تحت اثر برخورد موج فشاری بررسی کردند [۱]. کار Zhu & Nogami در سال ۱۹۹۴ بررسی رفتار تونل با پوشش در محیط ۳ بعدی و فرض اتصال کامل بین بدنه و محیط است [۲]. این مقاله، اساس الگوریتم ارائه شده است. Stamos & Beskos در سال ۱۹۹۵ با استفاده از BEM الگوریتم مناسبی را برای مدل سازی سازه های زیرزمینی با طول زیاد در فضای فرکانسی ارائه دادند [۳]. آنها در سال ۱۹۹۶ روش مناسبی را برای کاهش ابعاد مسئله از ۳ بعدی به ۲ بعدی ارائه دادند [۴].

هدف از ارائه این مقاله، تبیین روشی برای چگونگی استفاده از روش عددی المان مرزی برای تعیین پاسخ دینامیکی خم ۹۰ درجه تونل در برابر امواج زلزله در دامنه زمانی است. فرض های اساسی در این تحقیق، الاستیک بودن محیط های در نظر گرفته شده و اتصال کامل بین بدنه و محیط اطراف است.

در حال حاضر در بسیاری از جوامع مدرن و در حال توسعه بخش عمده ای از سازه های زیر بنایی را سازه های مدفون تشکیل می دهند. از جمله این موارد می توان به شبکه های راه و راه آهن زیرزمینی، سیستم های خطوط حیاتی و سازه های زیرزمینی حجیم به عنوان مخزن سوخت های جامد یا مایع و یا برای حفاظت از جان انسان ها و یا نگهداری تجهیزات خاص اشاره کرد. در میان این سازه ها، تونل ها با توجه به گستره کاربرد اهمیت بسیاری دارند. بخش مهمی از تونل ها که بسیار مورد استفاده هستند و روش خاصی در ادبیات فنی برای تحلیل این قسمت وجود ندارد، خم ۹۰ درجه موجود در بعضی تونل ها است.

از جمله کارهای انجام شده برای بررسی رفتار دینامیکی تونل ها می توان به کار Chu & Koenig در سال ۱۹۶۶ اشاره کرد [۱]. در این تحقیق رفتار دینامیکی تونل های بدون پوشش با فرض رفتار کرنش مسطح تحت اثر فشار داخلی پله ای بررسی شده است. Manolis & Beskos در سال ۱۹۸۸ رفتار دینامیکی تونل های پوشش



شکل ۱: تغییر مکان امواج مختلف با توجه به راستای گسترش صفحه موج [۵].

است. رابطه (۴) باید با شرایط اولیه؛

$$U_i(\vec{X}, 0) = U_i \quad (۵)$$

$$\dot{U}_i(\vec{X}, 0) = \dot{U}_i$$

در دامنه V و با شرایط مرزی؛

$$U_i(\vec{X}, t) = U_i \quad X \in S_1$$

$$t_i(\vec{X}, t) = \sigma_{ij} n_j = T_i \quad X \in S_2 \quad (۶)$$

روی مرز S همراه باشد. در رابطه (۶) بردار تنش و

مقادیر معلوم تغییر مکان ها، سرعت ها و بردارهای تنش هستند.

حل معادله (۴) منجر به تابعی می شود که تغییر مکان نقاط را در محیط بدون هیچگونه نامنظمی، نتیجه می دهد. همان طور که در شکل (۱) دیده می شود، در صورتی که در اثر حل معادله (۴) تغییر مکان در راستای L در مبدأ به صورت تابع f(t) باشد (همانند خروجی دستگاه های شتاب نگار که قابل تبدیل به تابع تغییر مکان هستند) تغییر مکان ها در اثر موج های مختلف به صورت زیر خواهد بود [۵].

$$f_p(\vec{X}, t) = \begin{cases} f(\vec{X} \cdot \vec{n} / C_1 - t) & \vec{X} \cdot \vec{n} / C_1 - t > 0 \\ 0 & \vec{X} \cdot \vec{n} / C_1 - t \leq 0 \end{cases}$$

$$U_x(\vec{X}, t) = l_x f_p(\vec{X}, t) \quad P\text{-wave}$$

$$U_y(\vec{X}, t) = l_y f_p(\vec{X}, t) \quad P\text{-wave} \quad (۷)$$

$$U_z(x, t) = l_z f_p(x, t) \quad P\text{-wave}$$

$$f_{SV}(\vec{X}, t) = \begin{cases} f(\vec{X} \cdot \vec{n} / C_2 - t) & \vec{X} \cdot \vec{n} / C_2 - t > 0 \\ 0 & \vec{X} \cdot \vec{n} / C_2 - t \leq 0 \end{cases}$$

$$U_x(\vec{X}, t) = (l_x l_z / \sqrt{l_x^2 + l_z^2}) f_{SV}(\vec{X}, t) \quad SV\text{-wave}$$

$$U_y(\vec{X}, t) = (l_y l_z / \sqrt{l_x^2 + l_z^2}) f_{SV}(\vec{X}, t) \quad SV\text{-wave} \quad (۸)$$

به کمک الگوریتم ارائه شده، رفتار دینامیکی تونل خمیده را می توان برای هر یک از امواج P، SV، SH (شکل (۱) و یا ترکیب آنها تحت زوایای برخوردی متفاوت بررسی کرد.

در انتها یک حالت خاص از تونل خمیده، به وسیله روش ارائه شده تحلیل و سپس نتیجه با نتایج موجود در ادبیات فنی مقایسه می شود. به دلیل نبود آنالیز مشابه سعی شده است که با میل دادن شرایط مسئله به سمت مسائل دو بعدی کارآیی الگوریتم موجود را بررسی کرد.

### معادلات حاکم بر مسئله

معادله حاکم در کلیه مسائلی که در ارزیابی رفتار دینامیکی مد نظر قرار می گیرد، معادله ناپیردینامیکی است. این گونه مسائل با عنوان مسائل الاستودینامیک در تئوری الاستیسیته مطرح می شود. مسئله مورد بررسی این تحقیق، حل سه بعدی انتشار امواج الاستیک است. ابتدا نحوه به دست آوردن معادله حاکم الاستودینامیک بررسی می شود. در الاستودینامیک، معادلات پایه ای به شکل زیر ارائه می شود:

$$\sigma_{ij,i} + b_j = \rho \ddot{u}_j \quad (۱)$$

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{ij} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (۲)$$

$$\varepsilon_{ij} = 0.5(U_{i,j} + U_{j,i}) \quad (۳)$$

که در آن  $\sigma_{ij}$  مؤلفه های تانسور تنش،  $b_j$  نیروی حجمی،  $u_i$  مؤلفه های جا به جایی،  $\rho$  جرم حجمی،  $\varepsilon_{ij}$  مؤلفه های تانسور کرنش،  $\delta_{ij}$  دلتای کرونکر و  $\lambda, \mu$  مشخصه های محیط هستند. با ترکیب ۳ رابطه ذکر شده، معادله ناپیر در حالت دینامیکی مطابق زیر به دست می آید:

$$(\lambda + \mu)U_{i,ii} + \mu U_{j,ii} + b_i = \rho \ddot{u}_i \quad (۴)$$

این معادله، معادله حاکم بر رفتار جسم الاستیک هموزن و ایزوتروپ با حجم V و سطح S = S<sub>1</sub> + S<sub>2</sub>

$$\int_S t_i^* u_i^* dS + \int_V \rho [b_i^* u_i^* + \dot{u}_i^0 u_i^* + \dot{u}_i^0 \dot{u}_i^*] dV = \quad (10)$$

که در معادله بالا (\*) نشان دهنده کانونولوشن ریمن است [۷]. در حالت به تعادل رسیده (۲) در جسم شکل (۲)  $(u_i^*, t_i^*, u_i^{*0}, \dot{u}_i^{*0}, b_i^*)$  به عنوان پاسخ جسم به یک ضربه واحد که در زمان  $\tau$  و در نقطه  $X'$  و در جهت  $e_i$  به جسم وارد شده است در نظر گرفته می شود؛

$$\rho b_i^* = \delta(t - \tau) \delta(\vec{X} - \vec{X}') e_i \quad (11)$$

که  $\delta$  نشان دهنده تابع دلتای دیراک است. جا به جایی ها و بردارهای تنش در جسم شکل (۲) در حالت (۲) به صورت زیر به دست می آید:

$$u_i(X, t) = U_{ij}(X, X', t) e_j \quad (12)$$

$$t_i(X, t) = T_{ij}(X, X', t) e_j \quad (13)$$

که در معادلات بالا  $t - \tau = t'$  است. با جاگذاری معادلات (۱۱) و (۱۲) و (۱۳) در معادله ناشی از تقابل دینامیکی (۱۰)، به دست می آوریم؛

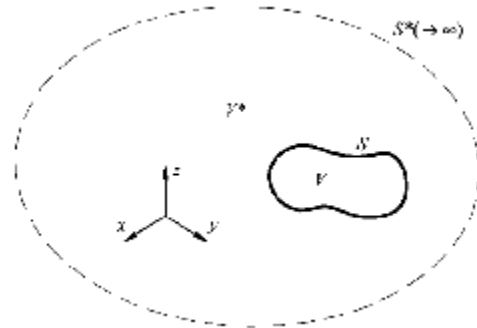
$$\begin{aligned} u_i(\vec{X}', t) = & \int_s \int_0^t [U_{ij}(\vec{X}, \vec{X}', t') t_j(\vec{X}, \tau) \\ & - T_{ij}(X, \vec{X}', t') u_j(\vec{X}, \tau)] d\tau ds + \\ & + \int_V \int_0^t U_{ij}(\vec{X}, \vec{X}', t') b_j(\vec{X}, \tau) d\tau dv + \\ & + \rho \int_V [(U_{ij}(\vec{X}, \vec{X}', t, o) \frac{\partial u_j(\vec{X}, o)}{\partial t} + \\ & \frac{\partial U_{ij}(\vec{X}, \vec{X}', t - o)}{\partial t} u_j(\vec{X}, o)] dV \end{aligned} \quad (14)$$

معادله بالا تغییر مکان نقاط داخلی را به مقادیر تغییر مکان و بردار تنش نقاط در روی مرز مرتبط می کند. در معادله بالا  $T_{ij}$  و  $U_{ij}$  به عنوان حل اساسی یا تابع گرین سه بعدی مشهور هستند که در مرجع [۷] به طور کامل آورده شده است و به دلیل حجم زیاد از بازنویسی آنها خودداری شده است.

معادله انتگرال مرزی تغییر مکانی با میل دادن نقطه  $X'$  به سمت مرز به دست می آید. در واقع برای حل معادله (۱۴)، نیازمند مقادیر تغییر مکان و بردار تنش در مرز هستیم و به همین دلیل نقطه  $X'$  را به سمت مرز میل داده تا در مرز برحسب نیاز (مرز نیومن یا مرز دیرکله) تغییر مکان یا بردار تنش را به دست بیاوریم. اما همان طور که از معادله (۱۴) مشخص است، یک سری از انتگرال ها روی مرز گرفته می شود  $(X \in S)$ . به همین

$$\begin{aligned} U_z(\vec{X}, t) = & \sqrt{l_x^2 + l_y^2} f_{SV}(\vec{X}, t) \\ f_{SH}(\vec{X}, t) = & \begin{cases} f(\vec{X} \cdot \vec{n} / C_2 - t) & \vec{X} \cdot \vec{n} / C_2 - t > 0 \\ 0 & \vec{X} \cdot \vec{n} / C_2 - t \leq 0 \end{cases} \\ U_x(\vec{X}, t) = & (l_y / \sqrt{l_x^2 + l_y^2}) f_{SH}(\vec{X}, t) \\ U_y(\vec{X}, t) = & (l_x / \sqrt{l_x^2 + l_y^2}) f_{SH}(\vec{X}, t) \\ U_z(\vec{X}, t) = & 0 \end{aligned} \quad (9)$$

که در آنها  $C_1, C_2$  به ترتیب سرعت موج عرضی و طولی، مؤلفه  $U_i$  ام تغییر مکان موج نوع  $K$  و  $l_i$  مؤلفه  $i$  ام بردار عمود بر صفحه موج در مختصات کلی است. برای بررسی اثر نامنظمی موجود در محیط باید از یک سری معادلات اضافی (که اغلب معادلات انتگرالی هستند) حاکم بر مسئله کمک گرفته شود. با استفاده از تئوری تقابل دینامیکی که در واقع بسط تئوری تقابل بتی در الاستواستاتیک است، معادلات پایه ای حاکم بر مسئله که موسوم به معادلات انتگرال مرزی هستند به دست می آید. برای استفاده از این معادلات، ۲ حالت مستقل دینامیکی از جسمی که در شکل (۲) نشان داده شده است را در نظر بگیرید. حالت اول با مشخصه های  $(u_i, t_i, u_i^0, \dot{u}_i^0, b_i)$  و حالت دوم با مشخصه های  $(u_i^*, t_i^*, u_i^{*0}, \dot{u}_i^{*0}, b_i^*)$  تعریف می شوند. هر یک از این حالات به طور مستقل به تعادل دینامیکی رسیده اند [۷].



شکل ۲: جسم نامحدود  $V^*$  که جسم محدود  $V$  را شامل می شود [۷].

با استفاده از قضیه تقابل دینامیکی در حجم  $V$  که توسط سطح  $S$  محصور شده است، برای  $t \geq 0$  (زمان) خواهیم داشت [۷]:

که در معادلات بالا:

$$\phi_k(\tau) = H(\tau - (k-1)\Delta t) - H(\tau - k\Delta t)$$

$$\Theta_1(\tau) = \frac{\tau - (k-1)\Delta t}{\Delta t} \phi_k(\tau) \quad (19)$$

$$\Theta_2(\tau) = \frac{k\Delta t - \tau}{\Delta t} \phi_k(\tau)$$

در روابط بالا  $H(\tau)$  نشان دهنده تابع پله‌ای واحد و بردار تنش و جا به جایی در زمان  $k\Delta t = t$  در نقطه مرزی  $X$  است. اگر معادله (۱۵) را برای زمان  $t_k (=K\Delta t)$  در نظر بگیریم، در نتیجه خواهیم داشت:

$$C_{ij}(\bar{X}') u_j^K(\bar{X}') = \sum_{k=1}^K \int_s \int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} U_{ij}(\bar{X}', \bar{X}, t') \times t_j^k(\bar{X}) d\tau ds +$$

$$- \sum_{k=1}^K \int_s \int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} T_{ij}(\bar{X}', \bar{X}, t') \times$$

$$[\Theta_1(\varepsilon) u_i^k(X) + \Theta_2(\varepsilon) u_i^{k-1}(X)] d\tau ds \quad (20)$$

پس از انجام انتگرال گیری تحلیلی نسبت به زمان هسته های تکیین به روابط زیر خواهیم رسید :

$$C_{ij}(\bar{X}') u_j^K(\bar{X}') = \sum_{k=1}^K \int_s U_{ij}^{*K-k+1} t_j^k(\bar{X}) ds$$

$$- \sum_{k=1}^K \int_s (T_{ij1}^{*K-k+1} + T_{ij2}^{*K-k+1}) u_j^k(\bar{X}) ds \quad (21)$$

که  $U_{ij}^{*K-k+1}$  و  $T_{ij\gamma}^{*K-k+1}$  ( $\gamma = 1, 2$ ) به صورت کامل در مرجع [۷] ارائه شده است.

### مجزاسازی هندسه

در تکنیک المان مرزی، مرز سازه توسط تعدادی المان تقسیم بندی می شود. مسئله حاضر از نوع مسائل اندرکنش بوده و سطوح مختلفی در مواد متفاوت وجود دارد. این سطوح با یک سری روابط همسازی به هم مرتبط می شوند. همان طور که در شکل (۳) دیده می شود، برای مجزاسازی، دو سطح وجود دارد که یکی سطح داخلی دیواره تونلها است و دیگری سطح خارجی آن.



شکل ۳: مدلی از دیواره بتنی خم ۹۰ درجه در تونل.

دلیل هنگامی که  $X'$  به سمت مرز میل می کند، فاصله در آن نقطه  $(\varepsilon = X' - X)$  به سمت صفر میل می کند و تکنیکی در فرمولاسیون به وجود می آید. برای همین و برای مطالعه رفتار تکنیکی اتفاق افتاده در روابط، سطح  $S$  را به دو سطح  $(S - S_\varepsilon)$  و  $S_\varepsilon$  مجزا کرده و با اعمال حد  $\varepsilon \rightarrow 0$ ، رفتار سینگولاریته بررسی می شود. پس از رفع این تکنیکی که به تکنیکی نوع اول معروف است [۱] به معادله (۱۵) خواهیم رسید که در آن  $C_{ij}(X')$  بر حسب اینکه  $X'$  روی چه سطحی قرار گرفته باشد، تعیین می شود. در نتیجه خواهیم داشت:

$$C_{ij}(\bar{X}') u_j(\bar{X}', t) = \int_0^t \int_s U_{ij}(\bar{X}, \bar{X}', t') t_j(\bar{X}, \tau) ds d\tau$$

$$- \int_0^t \int_s T_{ij}(\bar{X}, \bar{X}', t') u_j(\bar{X}, \tau) ds d\tau \quad (15)$$

$$C_{ij}(\bar{X}') = \begin{cases} 1 & \text{if } \bar{X}' \in V \\ 0.5\delta_{ij} & \text{if } \bar{X}' \in S \text{ (S smooth)} \\ 0 & \text{if } \bar{X}' \notin V \cup S \end{cases} \quad (16)$$

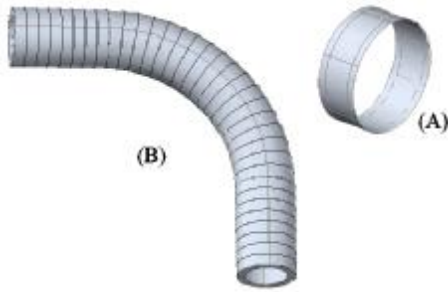
تکنیکی نوع دوم بر اساس روش ارائه شده در مرجع [۸] رفع می شود. جواب های اساسی تغییر مکان و تنش در پیوست معرفی شده اند.

### انتگرال گیری هسته های تکیین نسبت به زمان

برای انجام انتگرال گیری در حوزه زمان در معادله (۱۵) مجبور به مجزاسازی زمان همانند مجزاسازی مکان هستیم. برای مجزاسازی زمان، محور زمان تا لحظه  $t_k$  به  $K$  گام زمانی تقسیم می شود، به طوری که  $t_k = K\Delta t$  است. در هر گام زمانی میزان تغییرات متغیرهای میدانی (تغییر مکان و بردار تنش) به فرم معینی دانسته فرض می شود. با توجه به این که توابع زمانی موجود در هسته ها به طور خطی فرض می شوند، می توان انتگرال گیری نسبت به زمان را به صورت تحلیلی انجام داد. فرضیات متفاوتی برای در نظر گرفتن تغییرات متغیرهای میدانی در بازه های زمانی وجود دارد [۷]. در این تحقیق تغییرات تغییر مکان در بازه های زمانی به صورت خطی و تغییرات بردار تنش به صورت ثابت در نظر گرفته شده است، در نتیجه خواهیم داشت:

$$t_i(\bar{X}, \tau) = \sum_{k=1}^K \phi_k(\tau) t_i^m(\bar{X}) \quad (17)$$

$$u_i(\bar{X}, \tau) = \sum_{k=1}^K (\Theta_1(\tau) u_i^k(\bar{X}) + \Theta_2(\tau) u_i^{k-1}(\bar{X})) \quad (18)$$



شکل ۵: (A) تصویری از المان حلقه که توسط آن هر یک از سطوح مجزا سازی می‌شود. (B) تونل خمیده بعد از المان بندی.

می توان یک نگاشت بین دستگاه های مختصات تعریف کرد به طوری که نقطه  $i$  ام در شکل واقعی مقطع با مختصات  $(x_i, y_i)$ ، به نقطه ای با زاویه مرکزی  $\theta_i$  روی دایره ای با شعاع واحد نگاشت شود. در حالت کلی این نگاشت به صورت زیر نشان داده می شود [۲]:

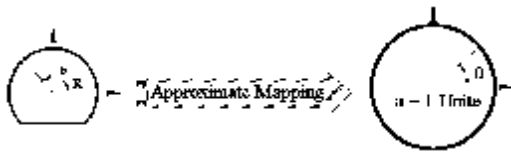
$$x = \sum_i N_i(\theta, \theta_i) x_i \quad (22)$$

$$y = \sum_i N_i(\theta, \theta_i) y_i$$

به طوری که  $x_i$ ،  $y_i$  مختصات  $x$  و  $y$  در مقطع واقعی در نقطه  $i$  ام روی مقطع در محیط اصلی است و همچنین  $\theta$  زاویه در مختصات استوانه ای بعد از نگاشت است و  $N_i(\theta, \theta_i)$  تابعی از  $\theta$ ،  $\theta_i$  است. تابع  $N_i(\theta, \theta_i)$  به شکل زیر تعریف می شوند:

$$N_i(\theta, \theta_i) = 1 \quad \& \quad N_i(\theta, \theta_j) = 0 \quad \text{for } j \neq i \quad (23)$$

یک تابع هارمونیک است



شکل ۶: نگاشت تقریبی مقطع ۳/۴ دایره به دایره با شعاع واحد.

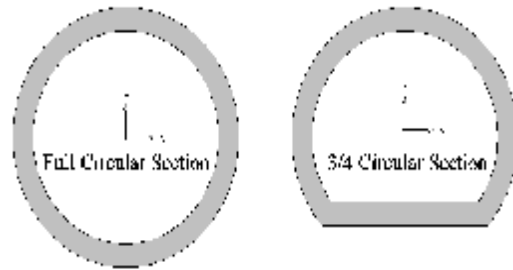
با توجه به رابطه (۲۳) برای  $Q$  نقطه  $(\dots)$  و  $2^n$  و ... و ۳۲ و ۱۶ و ۸ و ۴ ( $Q = 4$ ) تابع نگاشت به شکل کلی زیر تبدیل می‌شود [۲]:

$$N_q(\theta, \theta_q) = \sum_{p=0}^{q/2} C_p \cos p(\theta - \theta_q) \quad (24)$$

که در رابطه (۲۴)

با توجه به اینکه در کلیه سطوح از یک نوع المان استفاده می شود تنها مجزاسازی یکی از این سطوح مورد بحث قرار می گیرد.

انواع المان ها مانند المان ثابت، المان مربعی چهار گرهی، المان مثلثی ۳ گرهی، المان مربعی ۸ گرهی و المان مثلثی ۶ گرهی و ... می توانند برای مجزاسازی این سطوح استفاده شوند. به طور معمول در کارهای عمومی المان مرزی از المان های مربعی ۸ گرهی و یا مثلثی ۶ گرهی استفاده می شود. مسئله، تنها برای ۲ نوع مقطع تونل می‌تواند حل شود، که عبارتند از (۱) مقطع دایره ای کامل (۲) مقطع ۳/۴ دایره و با توجه به شکل این مقاطع که در شکل (۴) نشان داده شده اند، می‌توانیم از المان های خاص که به المان های حلقه معروف هستند، استفاده کنیم.



شکل ۴: مقاطع مختلف تونل خمیده در مدلسازی عددی و دستگاه مختصات محلی در مقطع خم تونل.

در شکل (۵) می‌توانید محدوده خم ۹۰ درجه تونل را بعد از المان بندی به وسیله المان های حلقه مشاهده کنید. در حقیقت با استفاده از این المان ها، تونل به یک سری حلقه های استوانه ای کوچک تبدیل می شود. برای به دست آوردن توابع شکلی و روابط مربوط به این المان از یک دستگاه مختصات خاص استفاده می شود و این دستگاه مختصات در حالت کلی تا انتهای مسئله ثابت باقی می ماند. همان طور که در شکل (۴) دیده می شود، صفحه مقطع تونل در صفحه محورهای مختصات  $x$  و  $y$  بوده و محور مختصات  $Z$  همواره در راستای محور طولی تونل که می‌تواند مستقیم و یا منحنی باشد، قرار می گیرد. یک مقطع دلخواه که عمود بر محور  $Z$  است، می‌تواند به صورت تقریبی به یک دایره با شعاع واحد در یک دستگاه مختصات استوانه ای نگاشت شود. مقطع دلخواه و نگاشت آن روی دایره با شعاع واحد در مختصات استوانه ای در شکل (۷) نشان داده شده است.

مختصات در راستای محور طولی تونل در انتهای المان حلقه است و  $\psi_1$  و  $\psi_2$  به ترتیب عبارتند از:

$$\psi_1 = \frac{1-\eta}{2}, \psi_2 = \frac{1+\eta}{2} \quad (۲۷)$$

با توجه به مجزا سازی هندسی انجام گرفته می توانیم روابطی را که در فرمولاسیون المان مرزی استفاده می شود به دست بیاوریم. این روابط عبارتند از:

$$r^2 = \left( \sum_{q=1}^Q \sum_{p=0}^{Q/2} C_p \text{Cosp}(\theta, \theta_q) x_q - x_i \right)^2 + \quad (۲۸)$$

$$\left( \sum_{q=1}^Q \sum_{p=0}^{Q/2} C_p \text{Cosp}(\theta, \theta_q) y_q - y_i \right)^2 + (z - z_i)^2$$

$$\frac{\partial}{\partial n} = r_{,1} n_1 + r_{,2} n_2 + r_{,3} n_3 \quad (۲۹)$$

$$\left\{ \begin{matrix} r_{,1} \\ r_{,2} \\ r_{,3} \end{matrix} \right\} = \frac{1}{r} \left\{ \begin{matrix} \sum_{q=1}^Q \sum_{p=0}^{Q/2} C_p \text{Cosp}(\theta - \theta_q) x_q - x_i \\ \sum_{q=1}^Q \sum_{p=0}^{Q/2} C_p \text{Cosp}(\theta - \theta_q) y_q - y_i \\ Z - Z_i \end{matrix} \right\} \quad (۳۰)$$

$$\left\{ \begin{matrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} N_1 \\ N_2 \\ 0 \end{matrix} \right\}$$

$$\Omega = \sqrt{\left( \sum_{q=1}^Q \sum_{p=0}^{Q/2} C_p \times p \times \sin p(\theta - \theta_q) x_q \right)^2} \quad (۳۱)$$

$$+ \left( \sum_{q=1}^Q \sum_{p=0}^{Q/2} C_p \times p \times \sin p(\theta - \theta_q) y_q \right)$$

$$N_1 = \sum_{q=1}^Q \sum_{p=0}^{Q/2} C_p \times p \times \sin p(\theta - \theta_q) x_q / \Omega$$

$$N_2 = \sum_{q=1}^Q \sum_{p=0}^{Q/2} C_p \times p \times \sin p(\theta - \theta_q) y_q / \Omega$$

$$dS = \left[ \Omega \times \left( \frac{dz}{dn} \right) \right] \times d\theta d\eta \quad (۳۲)$$

### مجزاسازی متغیرهای میدانی در هندسه

متغیرهای میدانی در مقطع تونل مقادیر متفاوتی دارند. اما هنگامی که هندسه تونل به محیط نگاشت شده

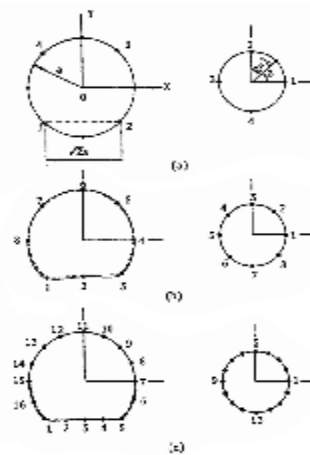
$$C_p = \begin{cases} 1/Q & p = 0 \text{ or } Q/2 \\ 2/Q & p = 1, 2, \dots, Q/2 - 1 \end{cases} \quad (۲۵)$$

بنابراین با توجه به رابطه (۲۴) و (۲۲) نگاشت مختصات برای Q نقطه به شکل زیر است:

$$x = \sum_{q=1}^Q \sum_{p=0}^{Q/2} C_p \text{Cosp}(\theta - \theta_q) x_q$$

$$y = \sum_{q=1}^Q \sum_{p=0}^{Q/2} C_p \text{Cosp}(\theta - \theta_q) y_q \quad (۲۶)$$

برای تعیین دقت این نگاشت مقطعی که در شکل (۶) نشان داده شده است، به طور تقریبی، با استفاده از رابطه کلی نگاشت که در رابطه (۲۶) ارائه شده، به یک دایره با شعاع واحد نگاشت شده است. تعداد نقاط در نظر گرفته شده در این مثال  $Q=4, 8, 16$  است. خط پر در سمت چپ شکل (۷)، شکل مقطع را بعد از نگاشت معکوس (نگاشت از دایره به شعاع واحد به شکل حقیقی مقطع) به وسیله روش ارائه شده و خط چین شکل واقعی مقطع را نشان می دهد. همان گونه که در شکل دیده می شود با افزایش تعداد نقاط روی محیط مقطع، دقت نگاشت افزایش می یابد. در فرمول بندی روش المان مرزی، معادلات انتگرال مرزی ۳ بعدی ارائه شده در رابطه (۲۱)، مجزاسازی در راستای محور طولی تونل و مقطع آن انجام می شود. مجزاسازی در راستای محور طولی تونل نیز به این ترتیب انجام می گیرد:



شکل ۷: نگاشت معکوس از دایره به شعاع واحد به شکل اصلی مقطع [۲].

$$Z = \psi_1 Z_1 + \psi_2 Z_2 \quad (۲۶)$$

که در این رابطه،  $Z_1$  طول محور مختصات در راستای محور طولی تونل در ابتدای المان حلقه و  $Z_2$  میزان محور



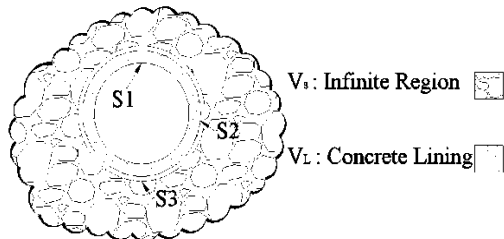
در هر مقطع به تعداد ترم های سری فوریه کاهش می‌یابد، زیرا تنها به تعداد ترم های سری فوریه در هر مقطع متغیر موجود است و به همین دلیل تنها به همین تعداد معادله المان مرزی را برای گره‌های موجود در هر مقطع اعمال می‌کنیم.

### تفرق امواج در سازه های مدفون

هنگامی که موج به بی نظمی های محدود سطح زمین مانند گودال‌ها یا بی نظمی های زیرزمینی مانند حفره ها و اجسام زیرزمینی برخورد می کند، به دلیل متفاوت بودن خصوصیات محیط اولیه و بی نظمی موجود، قسمتی از آن، تغییر مسیر داده و قسمت دیگر در این محیط انتشار می یابد. به این فرآیند تفرق گفته می شود. در عمل فرض می شود که موج اولیه در برخورد به این بی نظمی ها بدون تغییر منتشر می شود و در همین هنگام محیط دوم، خود تبدیل به یک منبع موج می شود و با ارتعاش های خود یک موج ثانویه به نام موج متفرق شده ایجاد می کند، به گونه ای که مجموع این دو موج بیانگر حالت واقعی است. بنابراین در مسائل تفرق امواج، میدان تغییر مکان کل  $u_i$  به عنوان مجموع میدان تغییر مکان آزاد  $u_i^f$  و میدان تغییر مکان متفرق شده  $u_i^s$  تعریف می شود، یعنی [۴]:

$$u_i = u_i^f + u_i^s \quad (35)$$

در واقع  $u_i^f$  نشان دهنده میدان موج در فضا با فرض نبود بی نظمی است. در نیم فضا  $u_i^f$  برابر مجموع موج برخوردی  $u_i^i$  و موج منعکس شده از سطح آزاد  $u_i^r$  است. میدان متفرق شده  $u_i^s$  شرایط تشعشع در بی نهایت را ارضا می کند.



شکل ۹: مقطع تونل با دیواره بتنی در محیط بی نهایت و نام گذاری سطوح.

در این مقاله تونل خمیده با دیواره بتنی یا فولادی در نظر گرفته می شود و با توجه به اینکه خصوصیات محیط با خصوصیات دیواره تونل متفاوت است، همان طور

انتقال داده می شود. تغییرات این متغیرها را می توان با تغییر  $\theta$  (زاویه مرکزی مقطع) بیان کرد. همان طور که در شکل (۸) نیز می بینید، این متغیرها هنگامی که  $\theta > 2\pi$  باشد تکرار می شوند. در واقع می توان گفت به صورت ذاتی با متغیر  $\theta$  متناوب هستند. پس با توجه به این موضوع اگر این متغیرها را به صورت ترم های سری فوریه بنویسیم، می توانیم مطمئن باشیم که بعد از تعداد کمی از ترم های فوریه این متغیرها به سرعت همگرا می شوند. به همین دلیل به جای اینکه از المان های ایزوپارامتریک استفاده شود و به تعداد گره ها معادله برای حل داشته باشیم، از سری فوریه برای مجزاسازی متغیرهای میدانی استفاده می شود. در واقع به این روش از تعداد معادلات هم بسیار کاسته می شود. بنابراین مجزاسازی به شکل زیر انجام می گیرد [۲]:

$$u^m(\bar{x}) = \sum_{s=1}^S [\delta_s(\theta)] u_s^m(\bar{x}) \quad (33)$$

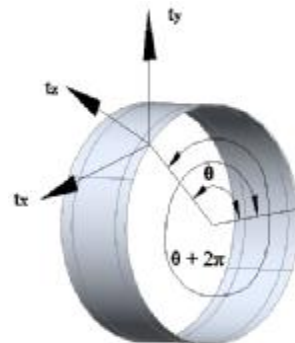
که در این رابطه،  $\delta_s(\theta)$  ترم  $s$  ام سری فوریه است  $(S=0,1,2,\dots,S)$  که به طور مثال خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} S=0 &\rightarrow \delta_s(\theta)=1 \\ S=1 &\rightarrow \delta_s(\theta)=\cos \theta \\ S=2 &\rightarrow \delta_s(\theta)=\sin \theta, \dots \end{aligned}$$

پایین نویس  $s$  در واقع نشان دهنده ترم  $S$  ام سری فوریه است. در واقع  $u_s^m(\bar{x})$  نشان دهنده ضریب ثابت ترم  $S$  ام جا به جایی در زمان  $m\Delta t$  در مقطعی است که بردار مکان نقطه  $(\bar{x})$ ، در آن جا قرار دارد.

به همین ترتیب برای بردار تنش هم خواهیم داشت:

$$t^m(\bar{x}) = \sum_{s=0}^S [\delta_s(\theta)] t_s^m(\bar{x}) \quad (34)$$



شکل ۸: متناوب بودن تغییرات متغیرهای میدانی نسبت به زاویه مرکزی.

در واقع به کمک این نوع مجزاسازی تعداد معادلات و متغیرها در همه مقاطع تونل‌ها، از تعداد گره های موجود

مجهولات عبارتند از  $u_i^O, t_i^O, u_i^I, t_i^I, u_i^S, t_i^S$  که به ترتیب بردار تنش تفرق یافته محیط  $(t_i^S)$ ، جا به جایی‌های تفرق یافته محیط در سطح تماس بین خاک و سازه تونل  $(u_i^S)$ ، بردار تنش کل در سطح خارجی سازه تونل  $(t_i^O)$  و جا به جایی کل در سطح خارجی سازه تونل  $(u_i^O)$ ، بردار تنش کل سطح داخلی سازه تونل  $(t_i^I)$  و جا به جایی کل سطح داخلی سازه تونل  $(u_i^I)$ . نحوه تشکیل معادلات (۳۸) و (۳۹) به تشریح توضیح داده می‌شود. ابتدا معادله مجزاسازی شده در زمان و مکان المان مرزی برای محیط و مرز خارجی تونل به شکل زیر بازنویسی می‌شود:

$$C_{ij} u_j^K(\vec{\xi}) = \sum_{k=1}^K \sum_{n=1}^N \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} U_{ij1}^{K-k+1} \hat{t}_j^{kn} |J| d\eta d\theta - \sum_{k=1}^K \sum_{n=1}^N \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} (T_{ij1}^{K-k+1} + T_{ij1}^{K-k}) \hat{u}_j^{kn} |J| d\eta d\theta \quad (43)$$

در سمت چپ معادله (۴۳)، اندیس ز نشان دهنده مؤلفه زام متغیرمیدانی نقطه  $\vec{\xi}$  است که معادله انتگرال مرزی برای این مؤلفه نقطه  $\vec{\xi}$  نوشته می‌شود. سطح حفاری به یک سطح استوانه ای با شعاع واحد نگاهت می‌شود که انتگرال روی سطح را به  $\theta$  که زاویه مرکزی مقطع استوانه به شعاع واحد است و  $\eta$  که طول نگاهت شده استوانه است، تبدیل می‌کند. اندیس  $k$  یا  $K$ ، اندیسی است که زمان مورد نظر  $(k\Delta t)$  را نشان می‌دهد و  $n$  یا  $N$  شماره مقطعی را نشان می‌دهد که تأثیر آن مقطع را در نقطه  $\vec{\xi}$  بررسی می‌کنیم. بالانویس « $\wedge$ » نشان دهنده متغیرها در سطح حفاری است. تغییرات متغیرهای میدانی در طول المان حلقه به شکل خطی فرض می‌شود:

$$\hat{t}_j^k = \frac{1-\eta}{2} \hat{t}_j^{kn} + \frac{1+\eta}{2} \hat{t}_j^{k(n+1)} \\ \hat{u}_j^k = \frac{1-\eta}{2} \hat{u}_j^{kn} + \frac{1+\eta}{2} \hat{u}_j^{k(n+1)} \quad (44)$$

و  $\hat{t}_j^{kn}$  و  $\hat{u}_j^{kn}$  در محیط دایره متناوب و با دوره تناوب  $2\pi$  تکرار می‌شود. در نتیجه می‌توانیم از سری فوریه برای مدل کردن این متغیرها استفاده کنیم. اگر متغیرهای  $\hat{a}_s$ ،  $\hat{b}_s$  به ترتیب ضرایب ترم فوریه  $k$ ام بردار تنش و جا به جایی باشند، برای سطح حفاری محیط خواهیم داشت:

که در شکل (۹) نشان داده شده، با فرض تماس کامل بین دیواره خارجی بدنه تونل و محیط اطراف  $(S_3 \equiv S_2)$  دو سری مرز وجود دارد که یکی مرز داخلی دیواره تونل و دیگری مرز خارجی دیواره تونل را مدل می‌کند. حال می‌توان برای هر یک از محیط‌ها از معادله انتگرال مرزی استفاده کرد. برای محیط بی‌نهایت خاک خواهیم داشت:

$$C_{ij}(\vec{X}') u_j^K(\vec{X}') = \sum_{k=1}^K \int_{(S_3)} U_{ij}^{*K-k+1} t_j^k ds_3 - \sum_{k=1}^K \int_{S_3} (T_{ij1}^{*K-k+1} + T_{ij2}^{*K-k}) u_j^k ds_3 \longrightarrow \vec{X}' \in S_3 \quad (36)$$

همچنین برای محیط دیواره تونل خواهیم داشت:

$$C_{ij}(\vec{X}') u_j^K(\vec{X}') = \left\{ \sum_{k=1}^K \left[ \int_{S_1} U_{ij}^{*K-k+1} t_j^k ds_1 + \int_{S_2} U_{ij}^{*K-k+1} t_j^K ds_2 \right] - \sum_{k=1}^K \int_{S_1} (T_{ij1}^{*K-k+1} + T_{ij2}^{*K-k}) u_j^k ds_1 + \int_{S_2} (T_{ij1}^{*K-k+1} + T_{ij2}^{*K-k}) u_j^k ds_2 \right\} \quad (37)$$

پس از مجزاسازی مرزها با المان‌های متفاوت و انتخاب نقاط  $X'$  روی  $(S_1 \cup S_2)$ ، برای معادلات (۳۶) و (۳۷) این نوع از به معادلات ماتریسی می‌رسیم:

$$[H]\{U_3\} + [G]\{t_3\} = \{D_1\} \quad (38)$$

محیط دیواره بتنی:

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{S1} \\ U_{S2} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_{S1} \\ t_{S2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} \quad (39)$$

معادلات (۳۸) و (۳۹) برای متغیرهای میدانی کل (total field) تشکیل شده و در نتیجه به معادلات همسازی برای ارتباط بین دو محیط دیواره تونل و خاک نیاز است:

$$U_{S3}^f + U_{S3}^s = U_{S2}^t \quad (40)$$

$$t_{S3}^f + t_{S3}^s = -t_{S2}^t \quad (41)$$

$$t_{S1}^t = 0 \quad (42)$$

با توجه به معادلات (۳۸) تا (۴۲)، شش سری مجهول و شش سری معادله وجود دارد که با حل این معادلات در هر یک از بازه‌های زمانی به حل مورد نظر و مجهولات خواهیم رسید.



به این علت بردار تنش در سطح داخلی تونل صفر در نظر گرفته شده که تونل بدون فشار داخلی است. در صورتی که تونل، با فشار داخلی ثابت باشد، می توان این شرایط را با شرایط به وجود آمده جمع کرد و در حقیقت از اصل سوپروپوزیشن استفاده کرد. اگر معادلات را یک بار برای سازه تونل بنویسیم خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} C_{ij}\delta_s & O \\ O & C_{ij}\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{a}_{sj}^{KN} \\ \hat{a}_{sj}^{KN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (G_{ij}^{KK})_{ns}^{22} & (G_{ij}^{KK})_{ns}^{23} \\ (G_{ij}^{KK})_{ns}^{32} & (G_{ij}^{KK})_{ns}^{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O \\ \hat{b}_{sj}^{kn} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (H_{ij}^{KK})_{ns}^{22} & (H_{ij}^{KK})_{ns}^{23} \\ (H_{ij}^{KK})_{ns}^{32} & (H_{ij}^{KK})_{ns}^{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{a}_{sj}^{kn} \\ \hat{a}_{sj}^{kn} \end{bmatrix} + \sum_{k=1}^{K-1} \begin{bmatrix} (G_{ij}^{KK})_{ns}^{22} & (G_{ij}^{KK})_{ns}^{23} \\ (G_{ij}^{KK})_{ns}^{32} & (G_{ij}^{KK})_{ns}^{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O \\ \hat{b}_{sj}^{kn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (H_{ij}^{KK})_{ns}^{22} & (H_{ij}^{KK})_{ns}^{23} \\ (H_{ij}^{KK})_{ns}^{32} & (H_{ij}^{KK})_{ns}^{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{a}_{sj}^{kn} \\ \hat{a}_{sj}^{kn} \end{bmatrix} \quad (50)$$

در رابطه (50)،  $(G_{ij}^{KK})_{ns}$  و  $(H_{ij}^{KK})_{ns}$  همانند روابط (46) تعریف می شوند، با این تفاوت که بالانویس  $^{23}$  (...) نماینده این موضوع است که عدد اول نشان دهنده سطحی است که گیرنده در آن وجود دارد و عدد دوم نشان دهنده سطحی است که فرستنده در آن قرار دارد. عدد (2) نشان دهنده سطح داخلی دیواره تونل و عدد (3) نشان دهنده سطح خارجی دیواره تونل است. با توجه به روابط ذکر شده معادلات (45) و (50) به معادله ماتریسی زیر تبدیل می شود:

$$\begin{bmatrix} O & C_{ij}\delta_s\delta_{Nn} + (H_{ij}^{KK})_{ns} & -(G_{ij}^{KK})_{ns} \\ C_{ij}\delta_s\delta_{Nn} + (H_{ij}^{KK})_{ns}^{22} & (H_{ij}^{KK})_{ns}^{23} & -(G_{ij}^{KK})_{ns}^{23} \\ (H_{ij}^{KK})_{ns}^{32} & C_{ij}\delta_s\delta_{Nn} + (H_{ij}^{KK})_{ns}^{33} & -(G_{ij}^{KK})_{ns}^{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{a}_{sj}^{kn} \\ \hat{a}_{sj}^{kn} \\ \hat{b}_{sj}^{kn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum_{k=1}^{K-1} \left( (G_{ij}^{KK})_{ns} \right) \left[ \hat{a}_{sj}^{kn} + \hat{b}_{sj}^{kn} \right] - \left[ (H_{ij}^{KK})_{ns}^{22} \right] \left[ \tilde{a}_{sj}^{kn} + \hat{a}_{sj}^{kn} \right] - \\ & \left( C_{ij}\delta_s + (H_{ij}^{KK})_{ns} \right) \left[ \hat{a}_{sj}^{kn} \right] + \left[ (G_{ij}^{KK})_{ns} \right] \left[ \hat{b}_{sj}^{kn} \right] \\ D_2 &= \sum_{k=1}^{K-1} \left( (G_{ij}^{KK})_{ns}^{22} \right) \left[ \hat{a}_{sj}^{kn} + \hat{b}_{sj}^{kn} \right] - \left[ (H_{ij}^{KK})_{ns}^{23} \right] \left[ \tilde{a}_{sj}^{kn} + \hat{a}_{sj}^{kn} \right] - \left[ (H_{ij}^{KK})_{ns}^{22} \right] \left[ \tilde{a}_{sj}^{kn} \right] - \\ & \left[ (H_{ij}^{KK})_{ns}^{23} \right] \left[ \hat{a}_{sj}^{kn} \right] + \left[ (G_{ij}^{KK})_{ns}^{23} \right] \left[ \hat{b}_{sj}^{kn} \right] \\ D_3 &= \sum_{k=1}^{K-1} \left( (G_{ij}^{KK})_{ns}^{32} \right) \left[ \hat{a}_{sj}^{kn} + \hat{b}_{sj}^{kn} \right] - \left[ (H_{ij}^{KK})_{ns}^{32} \right] \left[ \tilde{a}_{sj}^{kn} \right] - \left[ (H_{ij}^{KK})_{ns}^{33} \right] \left[ \tilde{a}_{sj}^{kn} + \hat{a}_{sj}^{kn} \right] - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [C_{ij}\delta_s] \{ \hat{a}_{sj}^{KN} \} &= \left[ (G_{ij}^{KK})_{ns} \right] \{ \hat{b}_{sj}^{Kn} \} - \left[ (H_{ij}^{KK})_{ns} \right] \times \\ & \times \{ \hat{a}_{sj}^{Kn} \} + \sum_{k=1}^{K-1} \left( \left[ (G_{ij}^{KK})_{ns} \right] \{ \hat{b}_{sj}^{kn} \} - \left[ (H_{ij}^{KK})_{ns} \right] \{ \hat{a}_{sj}^{kn} \} \right) \\ [C_{ij}\delta_s\delta_{Nn} + (H_{ij}^{KK})_{ns}] \{ \hat{a}_{sj}^{kn} \} &= \left[ (G_{ij}^{KK})_{ns} \right] \{ \hat{b}_{sj}^{kn} \} + \{ D_1 \} \\ \{ D_1 \} &= \sum_{k=1}^{K-1} \left( \left[ (G_{ij}^{KK})_{ns} \right] \{ \hat{b}_{sj}^{kn} \} - \left[ (H_{ij}^{KK})_{ns} \right] \{ \hat{a}_{sj}^{kn} \} \right) \quad (45) \end{aligned}$$

در رابطه (45):

$$\begin{aligned} (H_{ij}^{KK})_{ns} &= \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} \frac{l^{(n-1)}}{2} (T_{ij1}^{K-k+1} + T_{ij2}^{K-k}) \delta_s \times \Omega \times \frac{1+\eta}{2} d\eta d\theta \\ &+ \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} \frac{l^{(n)}}{2} (T_{ij1}^{K-k+1} + T_{ij2}^{K-k}) \delta_s \times \Omega \times \frac{1-\eta}{2} d\eta d\theta \\ (G_{ij}^{KK})_{ns} &= \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} \frac{l^{(n-1)}}{2} U_{ij1}^{K-k+1} \times \delta_s \times \Omega \times \frac{1-\eta}{2} d\eta d\theta \\ &+ \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} \frac{l^{(n)}}{2} U_{ij1}^{K-k+1} \times \delta_s \times \Omega \times \frac{1-\eta}{2} d\eta d\theta \quad (46) \end{aligned}$$

با توجه به معادلات اضافی (40) و (41) و تبدیل آن به ضرایب ترم های فوریه،  $\{D_1\}$  در شکل رابطه (44) تبدیل می شود:

$$\begin{aligned} \hat{a}^f + \hat{a}^s &= \hat{a}^s \\ \hat{b}^f + \hat{b}^s &= -\hat{b}^s \quad (47) \end{aligned}$$

که در روابط (43) بالانویس f نشان دهنده میدان آزاد موج و بالانویس s نشان دهنده میدان تفرق یافته موج است:

$$\begin{aligned} \{D_1\} &= \sum_{k=1}^{K-1} \left( \left[ (G_{ij}^{KK})_{ns} \right] \{ \hat{b}_{sj}^{kn} \} - \left[ (H_{ij}^{KK})_{ns} \right] \{ \hat{a}_{sj}^{kn} \} \right) + \\ &+ \sum_{k=1}^{K-1} \left( \left[ (G_{ij}^{KK})_{ns} \right] \{ -\hat{b}_{sj}^{kn} \} - \left[ (H_{ij}^{KK})_{ns} \right] \{ \hat{a}_{sj}^{kn} \} \right) \\ &+ [C_{ij}\delta_s\delta_{Nn}] \{ \hat{a}_{sj}^{kn} \} \quad (48) \end{aligned}$$

که در رابطه (48)، بالانویس « $\hat{a}$ ،  $\hat{b}$ » نشان دهنده ضرایب ترم های بسط فوریه برای سطح خارجی دیواره است. عبارت ترم فوریه s ام مربوطه به مؤلفه زام بردار تنش میدان آزاد. بالانویس f نماینده میدان آزاد، k نشان دهنده زمان  $k\Delta t$  و n نشان دهنده مقطعی است که گیرنده در آن مقطع وجود دارد. بالانویس «~» مربوطه به سطح داخلی تونل است، در نتیجه خواهیم داشت:

$$\tilde{u}_j^{kn} \Rightarrow \tilde{a}_{sj}^{kn} \quad AND \quad \tilde{t}_j^{kn} = 0 \quad (49)$$

نتایجی که در شکل (۱۱) ارائه شده است، نتایج تحلیل یک تونل با دیواره فولادی در حالت ۲ بعدی (کرنش مسطح) تحت اثر موج نشان داده شده در شکل (۱۰) است. این جواب ها به ترتیب عبارتند از: (۱) جواب تحلیلی عددی [۹] Baron & Parnes (1962) و (۲) جواب تحلیلی عددی [۱۰] Carnet & Crouzet-Pascal (1966) (۴) روش عددی المان مرزی در فضای فرکانسی بر اساس فرمول بندی میدان کل متغیرها (۵) روش عددی المان مرزی در فضای فرکانسی بر اساس فرمول بندی میدان تفرق یافته متغیرها (۶) جواب عددی با استفاده از برنامه المان محدود SAP IV [۱۱] (۷) جواب تحلیلی Savin (1961) که مسئله را در حالت کرنش مسطح برای بارگذاری استاتیکی حل کرده است [۱۲].

زمانی که موج فشاری شعاع حفاری تونل را طی می کند، مدت زمانی است که برای نرمالیزه کردن محور افقی استفاده شده است. این زمان با توجه به مشخصات هندسی که ذکر می شود برابر با ۰.۰۰۱ ثانیه خواهد بود. مشخصات محیط و دیواره فولادی به این ترتیب تعریف می شود:

مشخصات محیط:

$$\mu = \lambda = 2.48 \times 10^{10} \text{ Pa} \quad \rho = 2670 \text{ (N.S}^2/\text{m}^4)$$

مشخصات دیواره فلزی:

$$\mu = \lambda = 8.27 \times 10^{10} \text{ Pa} \quad \rho = 7800 \text{ (N.S}^2/\text{m}^4)$$

مشخصات محیط مربوط به سنگ گرانیت است. شعاع داخلی تونل ۵.۳۸ متر و شعاع داخلی آن ۵.۱۸ متر است. محدوده خم به ۱۷ المان حلقه و محدوده تونل مستقیم بالای خم با ۸ المان حلقه و تونل مستقیم پایین خم با ۵ المان حلقه مدل شده است. بازه های زمانی برای حل مسئله برابر  $\alpha R \times \pi / 36 C_1$  است که در این رابطه سرعت موج مربوط به سرعت موج در بدنه فولادی تونل است و  $\alpha$  بهینه ترین مقدار را پس از انجام چند آنالیز می گیرد. این مقدار برابر ۰.۷۵ پس از چندین آنالیز انتخاب شده است. برای مجزا سازی متغیرهای هندسی نیز از ۳ ترم فوریه استفاده شده است. همان گونه که در شکل (۱۲) نشان داده شده است، نسبت SCF برای نقاط A1 تا A8 رسم می شوند.

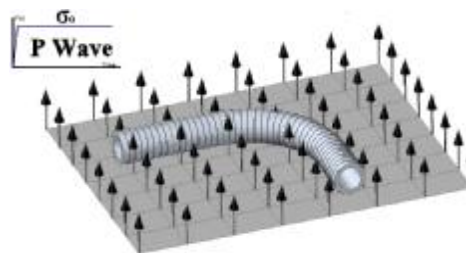
همان طور که در شکل (۱۳) و (۱۴) دیده می شود، هنگامی که نسبت شعاع خم به شعاع متوسط مقطع تونل  $\frac{3}{8}$  است، اثر خم بسیار زیاد بوده و نسبت SCF با گذشت زمان افزایش پیدا می کند. در بازه زمانی دهم این

$$\left( C_{ij} \delta_s \delta_{Nn} + \left[ \left( H_{ij}^{KK} \right)_{ns}^{33} \right] \left\{ \hat{a}_{sj}^{fKn} \right\} \right) + \left[ \left( G_{ij}^{KK} \right)_{ns}^{33} \right] \left\{ \hat{b}_{sj}^{fKn} \right\}$$

این معادله ماتریسی در زمانه ای مختلف از ابتدای زمان یعنی زمان رسیدن موج به خم تا انتهای آن یعنی زمانی که موج از خم به طور کامل عبور کرده باشد، تشکیل و حل می شود. حل معادله (۴۷) براساس روش حذفی گوس - جوردن انجام می شود و با توجه به ثوابت سمت راست معادله (۴۷) در هر قسمت از جواب های بازه قبل استفاده می شود.

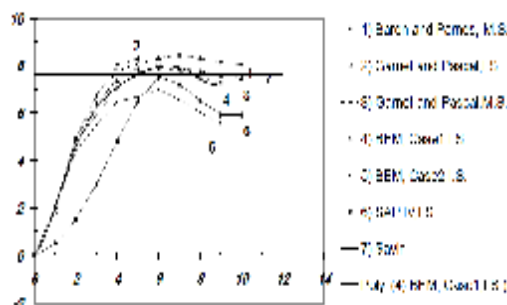
## نتایج عددی

مسئله مورد بحث، تحلیل دینامیکی یک تونل خمیده تحت گسترش موج پله ای P در محیط بی نهایت می باشد. تونل خمیده و شکل موج بر حسب زمان در شکل (۱۰) نشان داده شده است.

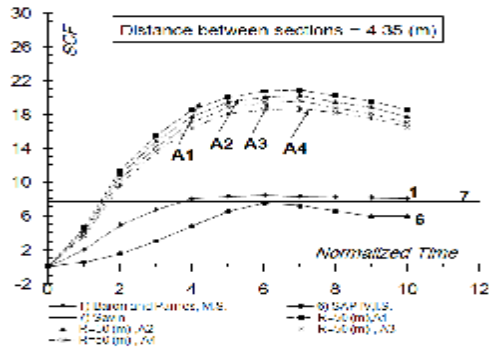


شکل ۱۰: تونل خمیده تحت اثر گسترش موج پله ای فشاری.

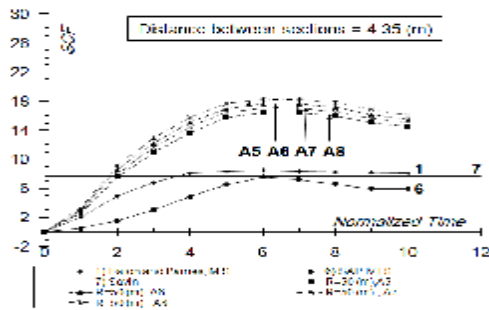
ارزیابی رفتار دینامیکی با بررسی ضریب تمرکز تنش (SCF) در دیواره تونل انجام می گیرد. نسبت های ارائه شده، نسبت تنش حلقوی ( $\sigma_{\theta\theta}$ ) در زاویه مرکزی  $\theta = 0$  به تنش وارد در اثر موج فشاری است. ضریب تمرکز تنش در مقطعی که بعد از خم قرار می گیرد و در نقطه A ارائه می شود. فاصله هر یک از این مقاطع  $R \times \pi / 36$  است که برای شعاع های متفاوت خم متفاوت است.



شکل ۱۱: نتایج تحلیل ۲ بعدی تونل.



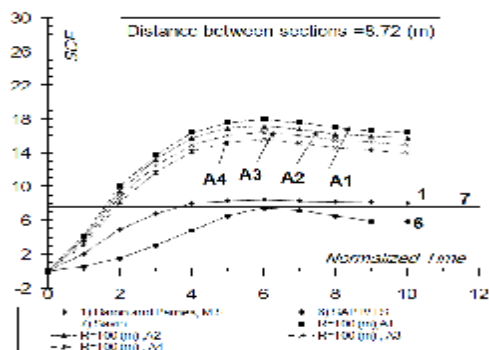
شکل ۱۵: ضریب تمرکز تنش در نقاط متناظر A در خم تونل با شعاع ۵۰ متر.



شکل ۱۶: ضریب تمرکز تنش در نقاط متناظر A در خم تونل با شعاع ۵۰ متر.

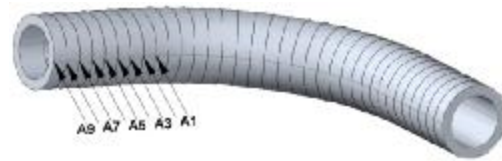
نکته قابل توجه در اشکال، افزایش فاصله بین منحنی های رسم شده برای نقاط A1 تا A8 نسبت به اشکال (۱۳) و (۱۴) است. این موضوع نشان دهنده کاهش اثر خم با حرکت در راستای تونل و در جهت دور شدن از خم است.

در اشکال (۱۷) و (۱۸) نیز مسیر اصلی همانند اشکال قبلی است. قابل ذکر است که همگرا شدن به سمت یک مقدار ثابت در این اشکال بهتر دیده می شود. این موضوع به دلیل افزایش فاصله نقاط روی خم و همچنین افزایش شعاع خم است.



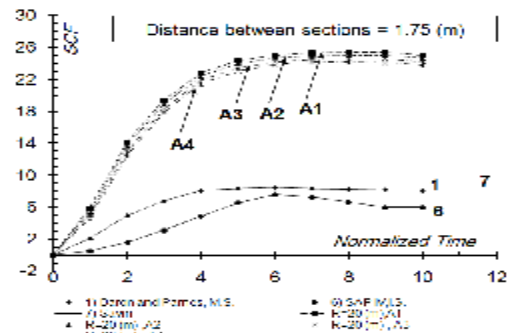
شکل ۱۷: ضریب تمرکز تنش در نقاط متناظر A در خم تونل با شعاع ۱۰۰ متر.

مقدار برای نقاط A4 و A8 به ترتیب برابر ۳/۱ و ۲/۷۸ برابر حل استاتیکی Savin است. در بازه زمانی دهم حل برابر حل استاتیکی Baron & Parnes و SAP IV به مقدار حل استاتیکی نزدیک شده است.

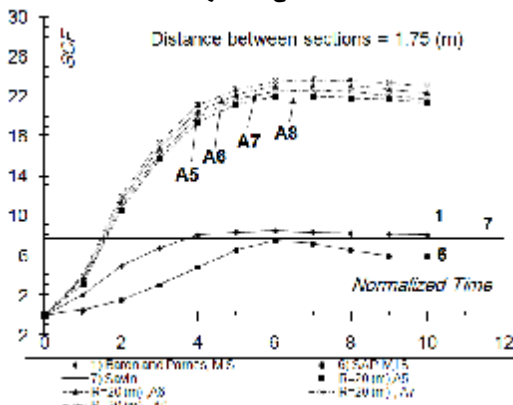


شکل ۱۲: ضریب تمرکز تنش برای نقاط نشان داده شده در این شکل ترسیم می شوند.

همان گونه که در اشکال (۱۵) و (۱۶) دیده می شود، با افزایش شعاع گردش خم به ۵۰ متر و نسبت شعاع گردش خم به شعاع متوسط ۹/۴۶، منحنی SCF به سمت پایدار شدن نزدیک می شود. در این حالت در بازه زمانی دهم برای نقطه A4 و A8 مقدار SCF به ترتیب برابر ۲/۱۶ و ۱/۹۰ برابر حل SAVIN است.



شکل ۱۳: ضریب تمرکز تنش در نقاط متناظر A در خم تونل با شعاع ۲۰ متر.



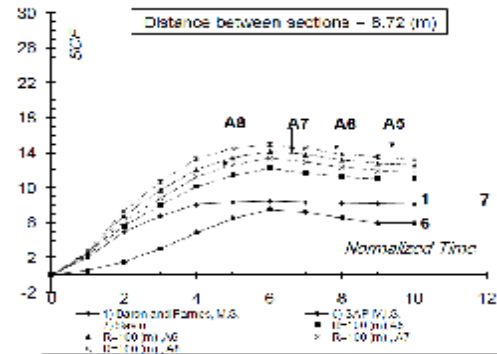
شکل ۱۴: ضریب تمرکز تنش در نقاط متناظر A در خم تونل با شعاع ۲۰ متر.

در این اشکال نسبت شعاع خم به شعاع متوسط مقطع برابر ۱۸.۹۴ است. مقادیر SCF نیز برای نقاط A4 و A8 و A5 به ترتیب ۱.۸۲ و ۱.۴۴ برابر حل SAVIN است.

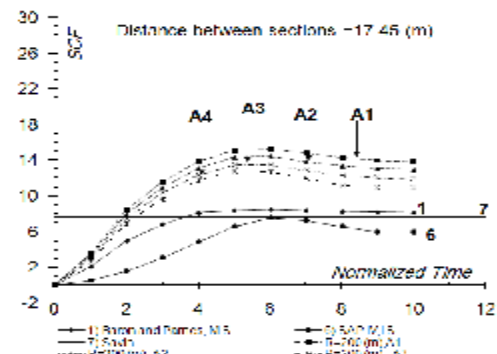
اشکال (۱۹) و (۲۰) برای نسبت شعاع خم به شعاع متوسط مقطع برابر با ۳۷.۸۸ رسم شده است. در این اشکال مقدار SCF برای نقاط A4 و A8 به ترتیب ۱/۴۳ و ۱/۰۴ برابر حل SAVIN است.

### نتیجه گیری

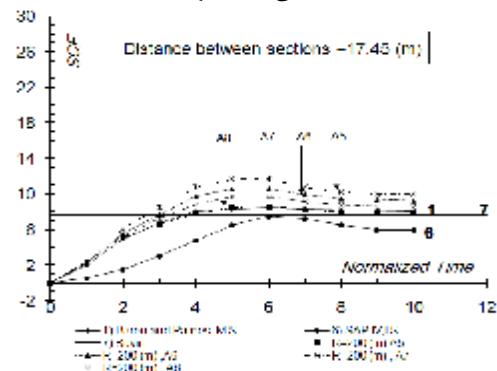
با توجه به فرمول بندی ارائه شده، خم ۹۰ درجه تونل های با دیواره را می توان به صورت سه بعدی تحت اثر انتشار موج بررسی کرد. موج برخوردی می تواند با هر زاویه ای نسبت به محور تونل قرار گیرد. به دلیل کمبود آنالیز های انجام شده در این زمینه در ادبیات فنی فقط یک مثال خاص توسط این فرمول بندی بررسی می شود. قابل ذکر است که فرمول بندی به طور کامل عمومی است و برای هر نوع موجی با هر راستایی قابل اعمال است. همان طور که در نتایج مثال عددی دیده شد، با افزایش شعاع گردش تونل و حرکت در راستای دور شدن از خم، اثر وجود خم کاهش می یابد. این امر با کاهش نسبت SCF شعاع های متفاوت گردش خم در اشکال مشهود است. در نسبت شعاع گردش خم به شعاع متوسط مقطع برابر ۳۷.۸۸ و با فاصله ۱۲۲.۵ متر از خم ۹۰ درجه مقدار SCF برای نقطه نظیر A در مقطع برابر ۱.۰۴ برابر حل SAVIN است. این موضوع نشان دهنده این حقیقت است که در زمانی که خم ۹۰ درجه در تونل ها وجود دارد، رفتار دینامیکی تا فاصله ای تقریباً برابر با شعاع مقطع تونل متأثر از وجود خم بوده و نمی توان از حل های دو بعدی برای بررسی رفتار دینامیکی این سازه ها استفاده کرد.



شکل ۱۸: ضریب تمرکز تنش در نقاط متناظر A در خم تونل با شعاع ۱۰۰ متر.



شکل ۱۹: ضریب تمرکز تنش در نقاط متناظر A در خم تونل با شعاع ۲۰۰ متر.



شکل ۲۰: ضریب تمرکز تنش در نقاط متناظر A در خم تونل با شعاع ۲۰۰ متر.

### مراجع

- 1 - Manolis, G. D. and Beskos, D. E. (1988). *Boundary Element Method in Elastodynamics*, Unwin Hyman, London.
- 2 - Nogami, T. and Zhu, J. X. (1994). "Transient Response of finitely long cylindrical cavity with arbitrary cross-section." *Soil dynamics and earthquake engineering*, Vol. 13, PP. 31-43.
- 3 - Stamos, A. A. and Beskos, D. E. (1995). "Dynamic analysis of large 3D underground structures by The BEM." *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 24, PP. 917-934.

- 4 - Stamos, A. A. and Beskos, D. E. (1996). "3D seismic response analysis of long lined tunnels in half space." *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, Vol.15, PP. 111-118.
- 5 - Wolf, J. P. (1988). *Soil Structure Interaction in Time Domain*, Prentice-Hall, Inc
- 6 - Marrero, M. and Dominguez, J. (2003). "Numerical behavior of time domain BEM for three-dimensional transient elastodynamic problems." *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 27, PP. 39-48
- 7 - Aliabadi, M. H.(2002). *The Boundary Element Method*, John Wiley & Sons, LTD
- 8 - Guiggiani, M.(1992)."Computing principal value integrals in 3D BEM for time-harmonic elastodynamics – A direct approach." *Communication in Applied Numerical Methods*, Vol. 8, PP. 141-149.
- 9 - Baron, M. L. and Parnes, R. (1962). "Displacement and velocities produced by the diffraction of a pressure wave by a cylindrical tunnel in an elastic medium." *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 29, PP. 385-395
- 10 - Garnet, H. and Crouzet-Pascal, J. (1966). "Transient of circular cylinder of an arbitrary thickness in an elastic medium, to a plan dilatational wave." *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 33, PP. 521-531
- 11 - Bathe, K. J. and Wilson, E. L. (1973). *SAP IV "Structural analysis program for elastic and dynamic response of a linear system*. Report No. EERC 73-11, University of California, Berkeley
- 12 - Savin, G. N. (1961). *Stress Concentration around Holes*, New York, Pergamon Press

## پیوست

### هسته اساسی تغییر مکان و تنش

اگر پارامترهای A, B, KC را در زمان آنالیز  $K\Delta t$  و زمان انتگرال گیری  $k\Delta t$ ، به شکل زیر تعریف کنیم:  
 پنج حالت مختلف ممکن است اتفاق بیافتد. هسته های اساسی تغییر مکان و تنش با توجه به این مطلب و رابطه (۴۶) به این ترتیب به دست می آید:

$$U_{ij} = \frac{1}{4\pi\rho} (\varphi_u \delta_{ij} - \chi_u r_{,i} r_{,j})$$

$$T_{ij\gamma} = \frac{1}{4\pi} \left[ \left( \varphi_{\gamma,r} - \frac{\chi_\gamma}{r} \right) \left( \frac{\partial r}{\partial n} \delta_{ij} + r_{,j} n_i \right) - 2 \frac{X_\gamma}{r} \left( n_j r_{,i} - 2 r_{,i} r_{,j} \frac{\partial r}{\partial n} \right) - 2 X_{\gamma,r} r_{,i} r_{,j} \frac{\partial r}{\partial n} + \left( \left( \frac{C_1}{C_2} \right)^2 - 2 \right) \left( \varphi_{\gamma,r} - \chi_{\gamma,r} - 2 \frac{\chi_\gamma}{r} \right) r_{,i} n_j \right]$$

CASE1 : IF  $[r < BC_2\Delta t]$  .AND.  $(r > AC_1\Delta t)$

$$\varphi_u = \chi_u = \varphi_\gamma = \chi_\gamma = 0$$

CASE2 : IF  $[(BC_1\Delta t < r < AC_1\Delta t)$  .AND.  $(r > AC_2\Delta t)$

$$\varphi_u = \frac{KC}{2r} - \frac{(A\Delta t C_2)^2}{2r^3}, \quad \chi_u = 3\varphi_u - \frac{KC}{r}, \quad \varphi_1 = \frac{KC}{2r} \left( A\Delta t - \frac{2r}{3C_1} \right) - \frac{(A\Delta t)^3 C_2^2}{2r^3}$$

$$\chi_1 = 3\varphi_1 - \frac{KC}{r} \left( A\Delta t - \frac{r}{C_1} \right), \quad \varphi_{1,r} = -\frac{\chi_1}{r}, \quad \chi_{1,r} = -\frac{3\chi_1}{r} + \frac{B\Delta t}{r^2}$$

$$\varphi_2 = \frac{KC}{2r} \left( \frac{2r}{3C_1} - B\Delta t \right) - \frac{(A\Delta t)^3 C_2^2}{6r^3} - \frac{(A\Delta t)^3 C_2^2}{2r^3 A}, \quad \chi_2 = 3\varphi_2 + \frac{KC}{r} \left( B\Delta t - \frac{r}{C_1} \right), \quad \varphi_{2,r} = -\frac{\chi_2}{r}$$

$$\chi_{2,r} = -\frac{3\chi_2}{r} - \frac{KC(B\Delta t)}{r^2}$$

CASE3: IF  $(BC_1\Delta t < r < AC_2\Delta t)$

$$\varphi_u = \frac{1+KC}{2r}, \quad \chi_u = 3\varphi_u - \frac{2+KC}{r}, \quad \varphi_1 = \frac{KC}{2r} \left( A\Delta t - \frac{2r}{3C_1} \right) - \left( A\Delta t - \frac{2r}{3C_2} \right) \times \frac{1}{2r} + \frac{1}{r} \left( A\Delta t - \frac{r}{C_2} \right)$$

$$\chi_1 = 3\varphi_1 - \frac{2}{r} \left( A\Delta t - \frac{r}{C_2} \right) - \frac{KC}{r} \left( A\Delta t - \frac{r}{C_1} \right), \quad \varphi_{1,r} = -\frac{\chi_1}{r} - \frac{A\Delta t}{r^2}, \quad \chi_{1,r} = -\frac{3\chi_1}{r} - \frac{1-KC}{r^2} A\Delta t$$

$$\varphi_2 = \frac{KC}{2r} \left( \frac{r}{C_1} - B\Delta t \right) - \left( \frac{r}{C_2} - B\Delta r \right) \frac{1}{2r} - \frac{KC}{6C_1} + \frac{1}{6C_2} + \frac{1}{r} \left( \frac{r}{C_2} - B\Delta t \right)$$

$$\chi_2 = 3\varphi_2 + \frac{2}{r} \left( B\Delta t - \frac{r}{C_1} \right) + \frac{KC}{r} \left( B\Delta r - \frac{r}{C_1} \right), \quad \varphi_{2,r} = -\frac{\chi_2}{r} + \frac{B\Delta t}{r^2}, \quad \chi_{2,r} = -\frac{3\chi_2}{r} + \frac{(1-KC)B\Delta t}{r^2}$$

CASE4: IF  $(AC_2\Delta t < r < BC_2\Delta t)$

$$\varphi_u = \frac{C_2^2(1-2A)(\Delta t)^2}{2r^3}, \quad \chi_u = 3\varphi_u, \quad \varphi_1 = \frac{C_2^2(4(A-1)^2 - A^3)}{6r^3} (\Delta t)^3, \quad \chi_1 = 3\varphi_1, \quad \varphi_{1,r} = -\frac{\chi_1}{r}$$

$$\chi_{1,r} = -\frac{3\chi_1}{r}, \quad \varphi_2 = \frac{e_2^2}{6r^3} (B^2 + 2A^2)(\Delta t)^3, \quad \chi_2 = 3\varphi_2, \quad \varphi_{2,r} = -\frac{\chi_2}{r}, \quad \chi_{2,r} = -\frac{3\chi_2}{r}$$